UNIDAD 6

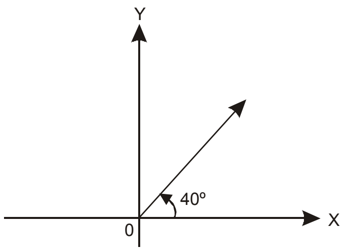
Reducción al primer cuadrante

Ángulo de referencia

Al ángulo agudo formado por el lado final de un ángulo positivo en posición normal θ con el lado positivo o negativo del eje x se llama ÁNGULO DE REFERENCIA y se denota por θ_R

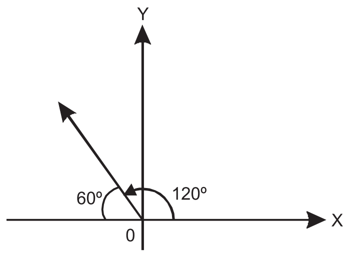
Ejemplos

1.



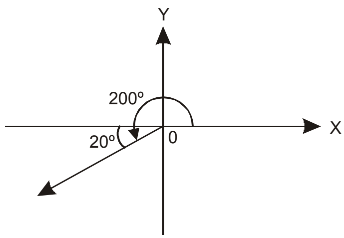
El ángulo de referencia de 40º es 40º

2.



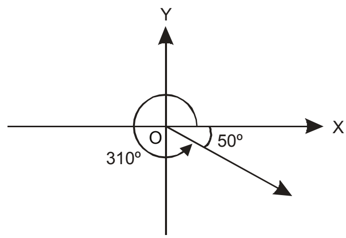
El ángulo de referencia de 120º es 60º

3.



El ángulo de referencia de 200º es 20º

4.



El ángulo de referencia de 310º es 50º

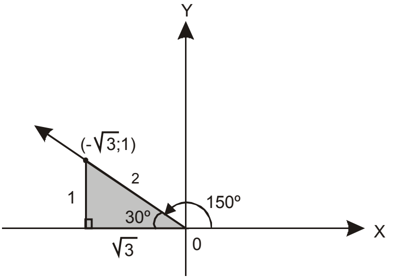
Propiedad fundamental

Si θ es un ángulo positivo en posición normal menor que una vuelta y θ_R su ángulo de referencia, entonces se cumple que las R.T. de θ y los R.T. de θ_R van a tener los mismos valores, aunque en algunos casos difieren en el signo, así:

$$R.T(\theta) = \pm R.T.(\theta_R)$$

Ejemplos

1.

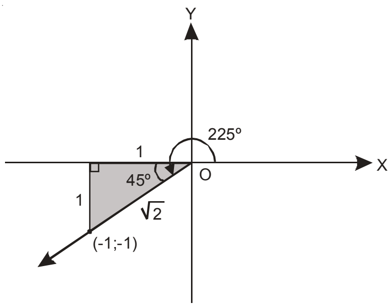


$$Sen150º = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$Sen30º = \frac{CO}{H} = \frac{1}{2}$$

Entonces:
Sen150º = Sen30º

2.

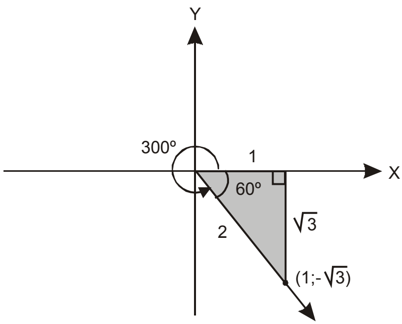


$$Cos\ 225º = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Cos\ 45º = \frac{CA}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces:
Cos225º = -Cos45º

3.



$$Tan300º = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$Tan60º = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Entonces:
Tan300º = –Tan60º

Observación

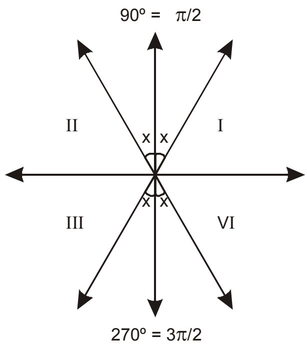
En los ejemplos anteriores se ha notado que efectivamente las R.T. de un ángulo en posición normal son igual a las R.T. de su respectivo ángulo de referencia, en algunos casos difieren en el signo.

Para hacer cálculos vamos a citar cuatro propiedades.

Propiedad I: Para ángulos positivos menores que una vuelta

Esta propiedad se analizará en dos partes:

A. Para entender la propiedad, nos ayudamos del siguiente gráfico.
   Si x es un ángulo agudo, es fácil darse cuenta que:



- (90º - x) I $\qquad \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \in$ I
- (90º + x) II $\qquad \left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ II
- (270º – x) III $\qquad \left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) \in$ III
- (270º + x) IV $\qquad \left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) \in$ IV

Los R.T. de los ángulos anteriores se reducen a R.T. de (x) aplicando la siguiente fórmula:

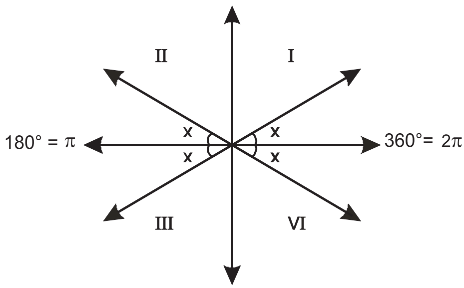
R.T.(90º – x) = CO – RT(x)	R.T.(270º – x) = ± CO – RT(x)
R.T.(90º + x) = ±CO – RT(x)	R.T.(270º + x) = ± CO – RT(x)

Ojo:El signo ± depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo que queremos reducir

Ejemplos

1. Sen100º = Sen(90º + 10º) = +Cos10º
2. Cos200º = Cos(270º – 70º) = –Sen70º
3. Tan310º = Tan(270º + 40º) = –Cot40º
4. $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=+\text{Cos}x$
5. $\text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\text{Sen}x$
6. $\text{Tan}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\text{Cot}x$

B. Para entender la propiedad, nos ayudamos del siguiente gráfico



Si x es un ángulo agudo es fácil darse cuenta que:

- (180º - x) II — (π – x) II
- (180º + x) III — (π + x) III
- (360º – x) IV — (2π – x) IV

Los R.T. de los ángulos anteriores se reducen a R.T. de (x) aplicando la siguiente fórmula:

$\boxed{\text{R.T.}(180º - x) = \pm\,\text{R.T.}(x)}$ $\boxed{\text{R.T.}(360º - x) = \pm\,\text{R.T.}(x)}$

$\boxed{\text{R.T.}(180º + x) = \pm\,\text{R.T.}(x)}$

Ojo: El signo ± depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo que queremos reducir.

Ejemplos

1. Sen110º = Sen(180º – 70º) = +Sen70º
2. Cos230º = Cos(180º + 50º) = –Cos50º
3. Tan340º = Tan(360º – 20º) = – Tan20º
4. Cot400º = Cot(360º + 40º) = Cot40º
5. Sen(π – x) = Senx
6. Sen(π + x) = –Senx
7. Tan(2π – x) = –Tanx

Propiedad II: Para ángulos positivos mayores que una vuelta

Si a un ángulo positivo θ mayor que una vuelta, lo dividimos entre 360º nos da como cociente "n" y residuo "α". Es decir:

$$\theta = n(360^\circ) + \alpha$$

Las R.T. de θ y las R.T. de α son iguales, por tanto:

$$\boxed{R.T.[n(360^\circ) + \alpha] = R.T.(\alpha)}$$

Ejemplos

1. Calcular Sen 750º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 750^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} \;\;30^\circ & 2 \end{array}$$

$$Sen750^\circ = Sen30^\circ = \frac{1}{2}$$

2. Calcular Cos 540º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 540^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 180^\circ & 1 \end{array}$$

$$Cos540^\circ = Cos180^\circ = -1$$

3. Calcular: Tan 900º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 900^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 180^\circ & 2 \end{array}$$

$$Tan900^\circ = Tan180^\circ = 0$$

4. Reducir al primer cuadrante: Sen 3010º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 3010^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 130^\circ & 8 \end{array}$$

Sen 3010º = Sen 130º

Sen 3010º = Sen(180º – 50º)

Sen 3010º = +Sen 50º

5. Reducir al primer cuadrante: Cos 4910º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 4910^\circ & 360^\circ \\ \hline 230^\circ & 13 \end{array}$$

Cos 4910º = Cos 230º
Cos 4910º = Cos(180º + 50º)
Cos 4910º = –Cos 50º

6. Reducir al primer cuadrante Tan 10000º

Resolución

$$\begin{array}{l|l} 10000^\circ & 360^\circ \\ \hline 280^\circ & 27 \end{array}$$

Tan10000º = Tan 280º
Tan10000º = Tan(360º - 80º)
Tan10000º = -Tan80º

7. $\text{Sen}(\cancel{10\pi} + x) = \text{Sen}(10\pi + x) = \text{Sen}x$
8. $\text{Cos}(\cancel{416\pi} + x) = \text{Cos}(416\pi + x) = \text{Cos}x$
9. $\text{Tan}(\cancel{35\pi} + x) = \text{Tan}(34\pi + \pi + x) = \text{Tan}(\pi + x) = \text{Tan}x$
10. $\text{Cot}(\cancel{499\pi} + x) = \text{Cot}(498\pi + \pi + x) = \text{Cot}(\pi + x) = \text{Cot}x$
11. $\text{Sen}\ \cancel{1275\pi} = \text{Sen}(1274\pi + \pi) = \text{Sen}\pi = 0$
12. $\text{Cos}\ \cancel{4377\pi} = \text{Cos}(4376\pi + \pi) = \text{Cos}\pi = -1$

13. $\text{Sen}\ 43\dfrac{\pi}{7}$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{l|l} 43 & 7 \\ \hline 1 & 6 \end{array} \qquad = \frac{43}{7} = 6 + \frac{1}{7}$$

$$\text{Sen}43\frac{\pi}{7} = \text{Sen}\left(6 + \frac{1}{7}\right)\pi = \text{Sen}\left(\cancel{6\pi} + \frac{\pi}{7}\right) = \text{Sen}\frac{\pi}{7}$$

14. $\text{Cos}\ \dfrac{237}{5}\pi$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{l|l} 237 & 5 \\ \hline 2 & 47 \end{array} \qquad \frac{237}{5} = 47 + \frac{2}{5}$$

$$\text{Cos}\frac{237}{5}\pi = \text{Cos}\left(47 + \frac{2}{5}\right)\pi = \text{Cos}\left(47\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \text{Cos}\left(\cancel{46\pi} + \pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\text{Cos}\frac{2\pi}{5}$$

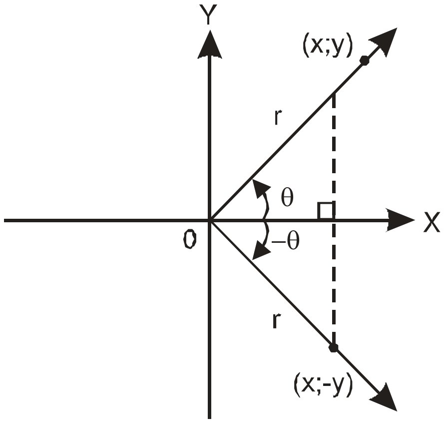
15. $\text{Tan}\dfrac{315}{8}\pi$ luego dividimos sin el π:

$$\begin{array}{r|l} 315 & 8 \\ \hline 3 & 39 \end{array} \qquad \frac{315}{8} = 39 + \frac{3}{8}$$

$$\text{Tan}\frac{315}{8}\pi = \text{Tan}\left(39+\frac{3}{8}\right)\pi = \text{Tan}\left(39\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \text{Tan}\left(\cancel{38\pi}+\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \text{Tan}\frac{3\pi}{8}$$

Propiedad III: Para ángulos negativos

Si θ es un ángulo positivo entonces -θ es un ángulo negativo, como se muestra en el gráfico siguiente.



Calculamos el Seno, Coseno y Tangente de (θ) y (-θ) y obtenemos:

$\text{Sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\text{Sen}(-\theta) = \dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Sen}(-\theta) = -\text{Sen}\theta}$

$\text{Cos}\theta = \dfrac{x}{r}$ $\qquad$ $\text{Cos}(-\theta) = \dfrac{x}{r}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}\theta}$

$\text{Tan}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\text{Tan}(-\theta) = -\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Tan}(-\theta) = -\text{Tan}\theta}$

Análogamente

$$\boxed{Cot(-\theta) = -Cot\theta}$$
$$\boxed{Sec(-\theta) = Sec\theta}$$
$$\boxed{Csc(-\theta) = -Csc\theta}$$

Nótese, que para el coseno y la secante el ángulo negativo es indiferente.

Ejemplos

1. $Sen(-30^o) = -Sen30^o = -\frac{1}{2}$
2. $Cos(-45^o) = Cos45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $Tan(-60^o) = -Tan60^o = -\sqrt{3}$
4. $Sen(-130^o) = -Sen130^o = -Sen(180^o - 50^o) = -(+Sen50^o) = -Sen50^o$
5. $Cos(-200^o) = Cos200^o = Cos(180^o + 20^o) = -Cos20^o$
6. $Tan(-325^o) = -Tan325^o = -Tan(360^o - 35^o) = -(-Tan35^o) = Tan35^o$

Ángulos suplementarios

Si α y β son suplementarios entonces:

$$\alpha + \beta = 180^o$$
$$\alpha = 180^o - \beta$$
$$Sen\alpha = Sen(180^o - \beta)$$
$$\boxed{Sen\alpha = Sen\beta}$$

Análogamente

$Cos\alpha = -Cos\beta$
$Tan\alpha = -Tan\beta$
$Cot\alpha = -Cot\beta$
$Sec\alpha = -Sec\beta$
$Csc\alpha = Csc\beta$

Ejemplos

1. $Sen130^o = Sen50^o$ porque: $130^o + 50^o = 180^o$
2. $Cos110^o = -Cos70^o$ porque: $110^o + 70^o = 180^o$
3. $Tan140^o = -Tan40^o$ porque: $140^o + 40^o = 180^o$
4. $Sen\frac{2\pi}{3} = Sen\frac{\pi}{3}$ porque: $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$
5. $Cos\frac{4\pi}{5} = -Cos\frac{\pi}{5}$ porque: $\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi$

Problemas I

1. Marcar verdadero (V) o falso (F)
   ( ) $\text{Sen}(\pi+x) = -\text{Senx}$
   ( ) $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{Sen } x$
   ( ) $\text{Tg}(2\pi-x) = -\text{Tg } x$
   a) VVV b) FFF c) FVV
   d) FFV e) VVF

2. Señale lo incorrecto:
   I. $\text{Sen}(\pi-x) = \text{Sen } x$
   II. $\text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\text{Sen } x$
   III. $\text{Tg}(\pi+x) = \text{Tg } x$
   IV. $\text{Tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \text{Ctg } x$
   V. $\text{Sec}(\pi+x) = \text{Sec } x$
   a) I b) II c) III
   d) IV e) V

3. Simplificar:
   $E = \text{TgA} + \text{Tg}(180°\text{-A}) + \text{Ctg}(90°\text{-A}) + \text{Tg}(180°+\text{A})$
   a) 0 b) Tg A c) 2TgA
   d) 1 e) -1

4. Calcular:
   $$E = \frac{\text{Cos}(\pi+\alpha)}{\text{Tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} \ ; \quad \text{Si: } \alpha = \frac{\pi}{6}$$
   a) -1/2 b) 2 c) -2
   d) 1 e) –1

5. Reducir:
   $$E = \frac{\text{Sen}(-A)}{\text{Sen}(\pi+A)} + \frac{\text{Cos}(-A)}{\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+A\right)}$$
   a) 0 b) 2 c) -2
   d) 1 e) –1

6. Simplificar:
   $$E = \frac{\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\text{Cos}(-x)} + \frac{\text{Tg}(\pi+x)}{\text{Tg}(-x)}$$
   a) 0 b) 2 c) –2
   d) 1/2 e) –1/2

7. Sabiendo que:
   $$\text{Sen}(90°+\alpha) = m$$
   Calcular:
   $M = \text{Cos}(-\alpha)+\text{Cos}(180°-\alpha)+\text{Cos}(360°-\alpha)$
   a) m b) 2m c) 3m
   d) -2m e) -m

8. Afirmar si es verdadero (V) o falso (F):
   ( ) $\text{Tg } 210° = \sqrt{3}$
   ( ) $\text{Sec } 300° = 2$
   ( ) $\text{Sen } 150° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   a) VVF b) FVV c) FVF
   d) FFV e) VVV

9. Marcar lo incorrecto:
   a) $\text{Sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\text{Cos } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $\text{Tg } 135° = -1$
   d) $\text{Sec } 143° = -\frac{5}{3}$
   e) $\text{Csc } 127° = \frac{5}{4}$

10. En un triángulo ABC, simplificar:
    $$E = \frac{\text{Sen}(A+B)}{\text{SenC}} + \frac{\text{Cos}(B+C)}{\text{CosA}} - \frac{\text{Tan}(A+C)}{\text{TanB}}$$
    a) 1 b) -1 c) 2
    d) 3 e) -3

11. Sabiendo que:
    $m + n = \text{Sen } 150° + \text{Tg } 225°$
    $m - n = \text{Cos } 240°$
    Hallar: $2m - 3n$
    a) 2 b) -2 c) 3/2
    d) -3/2 e) 3

12. En un triangulo ABC, simplificar:

$$E=\frac{Sen(A+B+2C)}{Sen(A+B)}$$

a) -1 b) -2 c) 1
d) Tg B e) Tg C

13. Siendo "A" un ángulo agudo, hallar "A" en:

Ctg(–160°) = Ctg A

a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

14. Si:

$$Ctg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\frac{k}{2}$$ y

$$Tg(x-\pi)=\frac{2k+1}{3}$$

Calcular el valor de "k"

a) -2/7 b) 7/2 c) -7/2
d) 3/7 e) 7/3

15. Simplificar:

$$E=\frac{Sen\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{Sen\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}-\frac{Cos(\alpha-270°)}{Sen(\alpha-180°)}$$

a) 1 b) –1 c) 0
d) 2 e) –2

16. Si: "α" y "β" son dos ángulos complementarios y

$Sen(2\alpha+3\beta)=-\frac{1}{3}$; el valor de:

$Tg(3\alpha + 2\beta)$, es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$ e) $-\sqrt{8}$

17. Siendo: $a+b+c = \pi$
Simplificar:

$E=\frac{1}{2}[Cos(a+2b+c)+Sen\frac{1}{2}(a+3b+c)]$

a) 0 b) Sen b c) 0,5Senb
d) 2Sen b e) 1

18. Hallar:

$$E=\frac{Tg\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+Tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+Sec\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{Sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2}$$

Donde: $k \in Z$

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{2}-1$ c) $1-\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}$ e) 1

19. Si: Sen A - 2Cos A = 0; calcular:

$$E=\frac{Tg(90°+A)Sec(180°-A)Tg(270°-A)}{Sen(360°-A)Csc(180°-A)Cos(180°+A)}$$

a) 8/3 b) –8/3 c) 3/8
d) –3/8 e) 5/4

20. Simplificar:

$$A=Cos\frac{\pi}{11}+Cos\frac{3\pi}{11}+Cos\frac{8\pi}{11}+Cos\frac{10\pi}{11}$$

a) 1 b) –1 c) 0
d) 2 e) –2

CLAVES I				
1. a	2. e	3. c	4. a	5. b
6. a	7. a	8. c	9. d	10. a
11. b	12. a	13. b	14. a	15. c
16. c	17. a	18. c	19. e	20. c

Problemas II

1. Simplificar:

$$A=\frac{Sen(90°-x)Sec(180°-x)}{Cos(90°+x)Csc(360°-x)}$$

a) -1/2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 1/2

2. Simplificar:

$$M=\frac{Tan(180°+x)}{Cot(270°+x)}+\frac{Sec(90°+x)}{Csc(180°-x)}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

3. Simplifique:

$$N=\frac{Sen(\pi+x)+Sen(-x)}{Cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{Cos(-x)}{Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

a) -2 b) 3 c) 0
d) 1 e) 2

4. Calcule el valor de:

$$P=\frac{Sen150°\cdot Sec300°+Tan^2 135°}{Tan315°+Cos240°}$$

a) -2/3 b) -4/3 c) –1/3
d) 3 e) 3/4

5. Determinar el valor de:

$$Q = Sec\ 1500° + 5Sen\ 2483°$$

a) -2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

6. Reducir:

$$R=\frac{Sen200°+2Cos1510°}{Cos(-70°)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 1/2 e) 1/3

7. Reduzca:

$$E = Tan(4\pi+x)+Tan(7\pi+x)+Tan(12\pi-x)$$

a) –3Tan x b) –Tan x c) 3Tan x
d) Tan x e) 0

8. Calcule:

$$F = Tan\ 57\frac{\pi}{4} + Sec\ 61\frac{\pi}{3}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 3

9. Calcule la medida del ángulo agudo que cumple con:

$$Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3Cos(\pi-x) = Sec(2\pi-x)$$

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$

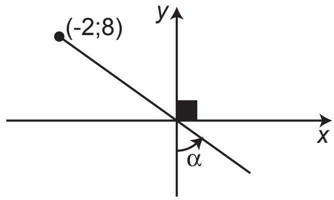
d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{12}$

10. En un triángulo ABC, reducir:

$$N=\frac{SenC}{Sen(A+B)}+\frac{Cos(B+C)}{CosA}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

11. De la figura, calcule: Tan α



a) –2 b) –4 c) 0
d) 1/2 e) 1/4

12. En un triángulo ABC, reducir:

$$T=\frac{Cos(2A+2B)}{Cos2C}+\frac{Tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{Cot\frac{B}{2}}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

13. Simplifique:

$$H = Tan\frac{2\pi}{13}+Tan\frac{5\pi}{13}+Tan\frac{8\pi}{13}+Tan\frac{11\pi}{13}$$

a) -2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Si "θ" es un ángulo positivo y menor que una vuelta, de modo que cumple:

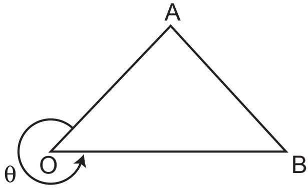
$$Sen\ \theta = Cot(180°+\theta)+Tan(270°+\theta)$$

Calcule:

$$A = Cos\ \theta + Sen\frac{\theta}{2} + Sec\ 2\theta$$

a) –2 b) –1 c) 1
d) 2 e) 3

15. De la figura, calcule: Tan θ.
Si: OA=AB=41 ^ OB=80



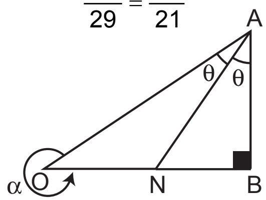
a) 20/21 b) 21/20 c) –9/40
d) –40/9 e) –1/2

16. Siendo "α" y "β" ángulos agudos de un triángulo rectángulo, reducir:
P = Sec(α+2β)+Tan(2α+5β)×Cot(β+4α)+Csc(2α+β)

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

17. De la figura mostrada, calcule:
Tan α
Además:

$$\frac{ON}{29}=\frac{NB}{21}$$



a) –2,1 b) –4,2 c) –1,05
d) 2,1 e) 4,2

18. Siendo "α" y "β" ángulos complementarios, calcular:

$$M=\frac{Cos(2\alpha+4\beta)}{Cos(4\beta+6\alpha)}+\frac{Tan(3\alpha+2\beta)}{Cot(2\alpha+3\beta)}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

19. Reduzca:

$$P=\frac{Sen(230°+\theta)\cdot Tan(300°-\theta)}{Tan(60°+\theta)\cdot Cos(400°-\theta)}$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

20. El equivalente de:

W = Sen Kπ – Cos(K+1)π ; k $\in$ Z es:

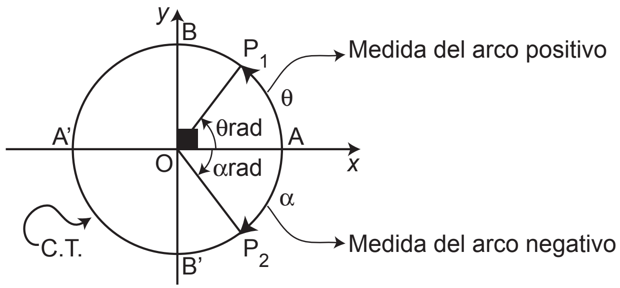
a) 1 b) 1^k c) $(-1)^k$
d) $(-1)^{2k}$ e) $(-1)^{k+1}$

CLAVES II				
1. b	2. a	3. b	4. b	5. b
6. a	7. d	8. e	9. c	10. c
11. e	12. e	13. c	14. c	15. c
16. b	17. c	18. e	19. d	20. c

UNIDAD 7

Circunferencia Trigonométrica (C.T.)

Es aquella circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas rectangulares y cuyo radio es igual a la unidad, razón por la cual se le denomina también circunferencia unitaria.



La ecuación de la circunferencia trigonométrica es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Para un mejor entendimiento de las definiciones posteriores se enuncian las siguientes denominaciones a los puntos:

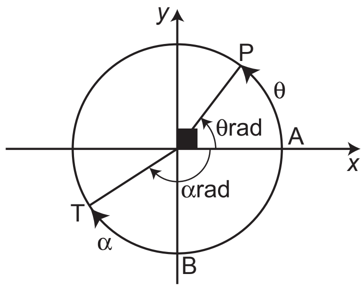
A(1; 0) Como origen de arcos
B(0; 1) Como origen de complementos
A'(–1;0) Como origen de suplementos
B'(0;-1) Sin nombre especial
P_1 ^ P_2 Extremos de arco

Arco en posición estándar

Es aquél arco cuyo extremo inicial es el origen de arcos de la C.T. y su extremo final cualquier punto sobre la C.T. (es aquel que indica el cuadrante al cual pertenece dicho arco).

Observación

El ángulo central correspondiente a un arco en posición estándar tiene una medida en radianes que es igual a la medida del arco en unidades.



"θ" y "α" son arcos en posición estándar tales que:

θ es (+) ^ $\theta \in$ IC

α es (–) ^ $\alpha \in$ IIIC

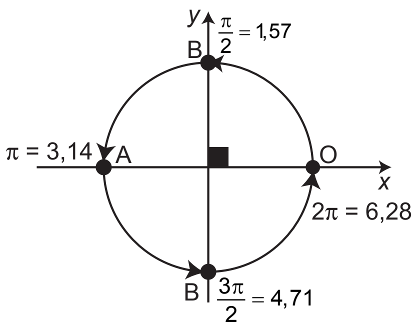
$\overset{\frown}{AP} = \theta$

$\overset{\frown}{AT} = \alpha$

Observación

Del gráfico estos extremos de arcos servirán como referencia para ubicar aproximadamente otros arcos en la C.T.

Ejemplo

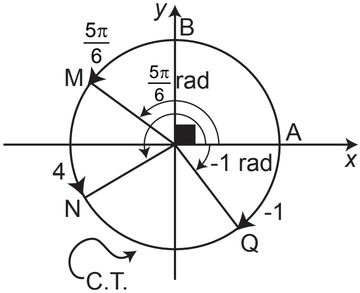


Ubique gráficamente en la circunferencia trigonométrica los extremos de arcos (en posición estándar).

$$\frac{5\pi}{6}; 4; -1$$

Resolución

Para que los arcos se encuentren en posición estándar en la C.T. estos tendrán su posición inicial en el punto A(1; 0).



M: extremo de arco $\frac{5\pi}{6}$ ($\frac{5\pi}{6} \in$ IIC)

N: extremo de arco 4 ($4 \in$ IIIC)

Q: extremo de arco -1 ($-1 \in$ IVC)

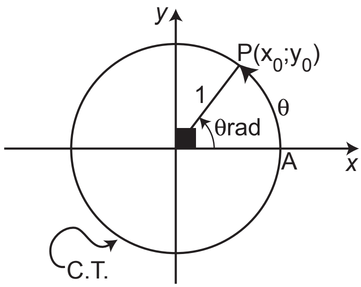
Razones trigonométricas de arcos en posición estándar

Son numéricamente iguales a las razones trigonométricas de su respectivo ángulo central en la C.T.

Importante:

$$\boxed{\text{R.T.(arco) = R.T.(central)}}$$

Cálculo de las R.T.



$$\text{Sen } \theta = \text{Sen}(\theta \text{ rad}) = \frac{y_0}{1} = y_0$$

$$\text{Cos } \theta = \text{Cos}(\theta \text{ rad}) = \frac{x_0}{1} = x_0$$

$$\text{Tg } \theta = \text{Tg}(\theta \text{ rad}) = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\text{Ctg } \theta = \text{Ctg}(\theta \text{ rad}) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$\text{Sec } \theta = \text{Sec}(\theta \text{ rad}) = \frac{1}{x_0}$$

$$\text{Csc } \theta = \text{Csc}(\theta \text{ rad}) = \frac{1}{y_0}$$

De acuerdo al gráfico:

$$\boxed{\text{R.T.}(\theta) = \text{R.T.}(\theta \text{ rad})}$$

Ejemplo:

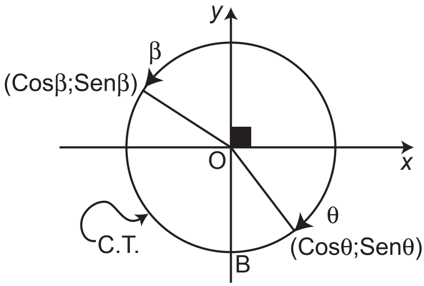
$$\text{Sen}\frac{\pi}{6} = \text{Sen}\frac{\pi}{6}\text{rad} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tg}\frac{\pi}{4} = \text{Tg}\frac{\pi}{4}\text{rad} = 1$$

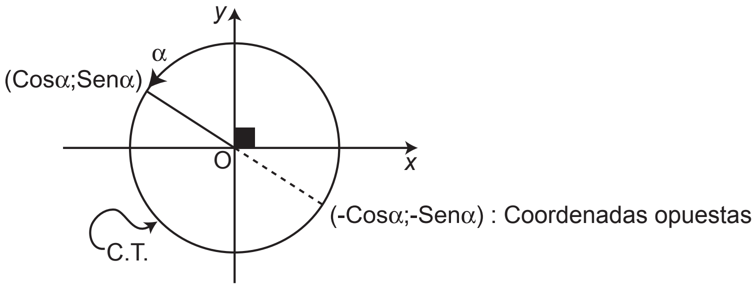
Observación:
Las coordenadas de “P” son (x_0;y_0), luego se tendra:

$$\boxed{(x_0;y_0) = (\text{Cos}\ \theta;\ \text{Sen}\ \theta)}$$

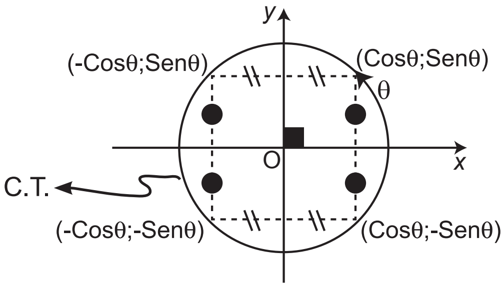
Coordenadas del extremo de arco



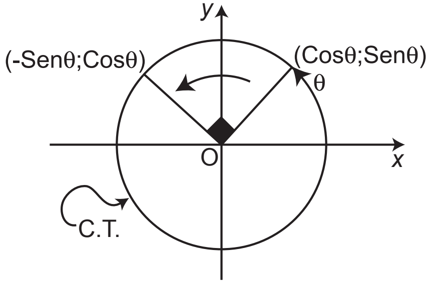
Coordenadas opuestas



Coordenadas simétricas



Coordenadas ortogonales



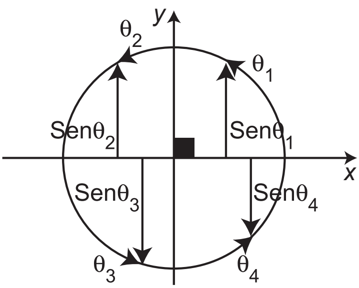
Líneas trigonométricas

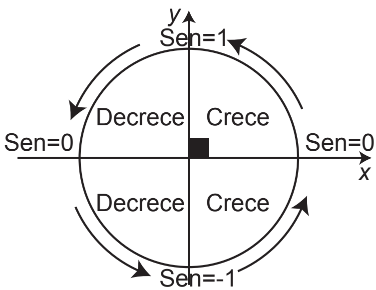
Son segmentos de rectas dirigidas, los cuales nos representan en la circunferencia trigonométrica, el valor numérico de una razón trigonométrica de un ángulo o número.

Representaciones de seno, coseno de un arco en la C.T.

Representación de la línea Seno

El seno de un arco viene a ser la ordenada trazada de su extremo de arco.



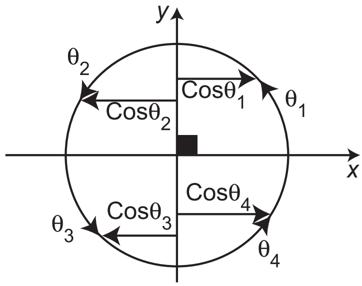


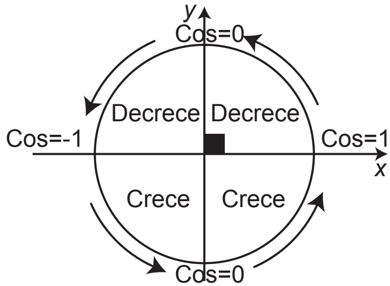
Rango de valores

$$\boxed{-1 \leq \text{Sen}\ \theta \leq 1}$$
$$\forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

Representación de la línea Coseno

El coseno de un arco es la abscisa trazada de su extremo de arco.





Rango de valores

$$\boxed{-1 \leq \text{Cos}\,\theta \leq 1}$$
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

Problemas I

1. Considerando los valores de:

   Sen 40°, Sen 130°, Sen 220°, Sen 310°

   Luego el mayor valor será:
   a) Sen 40°　　b) Sen 130°
   c) Sen 220°　　d) Sen 310°
   e) Necesito calculadora

2. Hallar la variación de "m" para que sea posible la relación:

   $$\text{Sen } \alpha = 2m - 7$$

   a) $3 \leq m \leq 4$　　b) $-1 \leq m \leq 1$
   c) $6 \leq m \leq 8$　　d) $-2 \leq m \leq 2$
   e) $2 \leq m \leq 3$

3. Hallar la extensión de "K", si:

   $$"\theta" \in \text{IIIC y Sen } \theta = \frac{3K-7}{4}$$

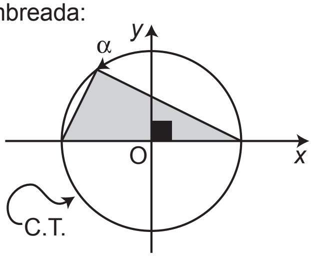
   a) $K \in [-1; 1]$　　b) $K \in \left\langle -1; \frac{7}{3} \right\rangle$
   c) $K \in \left[-1; \frac{7}{3} \right]$　　d) $K \in \left\langle 1; \frac{7}{3} \right\rangle$
   e) $K \in \left[1; \frac{7}{3} \right]$

4. Si "A" es el máximo valor, y "B" el mínimo valor de la expresión:

   $$Q = 2 - 3 \text{ Sen } \alpha$$

   Encontrar el valor de "A-B"
   a) 4　　b) 5　　c) 6
   d) 7　　e) 8

5. Hallar el área de la región sombreada:



   a) $\frac{\text{Sen}\alpha}{2}$ μ²　　b) 2Sen α μ²
   c) Sen α μ²　　d) 2Cos α μ²
   e) Cos α μ²

6. Considerando los valores de:

   Cos 55°, Cos 145°, Cos 235°, Cos 325°

   Luego el menor valor será:
   a) Cos 325°　　b) Cos 235°
   c) Cos 145°　　d) Cos 55°
   e) Necesito calculadora

7. Hallar la variación de "m" si:

   $$\text{Cos}\alpha = \frac{m+3}{5}$$

   a) $-1 \leq m \leq 1$　　b) $2 \leq m \leq 8$
   c) $-8 \leq m \leq 8$　　d) $-8 \leq m \leq -2$
   e) $-8 \leq m \leq 2$

8. Si: "θ" ∈ IVC y Cos θ = $\frac{1-3a}{7}$

   ¿Entre que límites debe estar "a" para que el "Cos θ" existe?

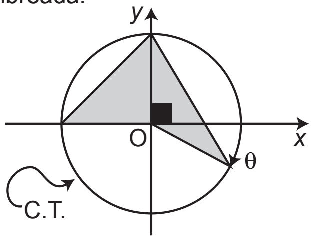
   a) $\left] \frac{1}{3}; 2 \right[$　　b) $\left[-\frac{1}{3}; 2 \right]$　　c) $\left] -\frac{1}{3}; 2 \right[$
   d) $\left[-2; \frac{1}{3} \right]$　　e) $\left] -2; \frac{1}{3} \right[$

9. Calcular el cociente de los valores máximo y mínimo de:

   $$Q = 6\text{Cos } \alpha - 7$$

   a) 1　　b) 13　　c) –13
   d) –1/13　　e) 1/13

10. Hallar el área de la región sombreada:



a) $\left(\frac{1-\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$ b) $\left(\frac{1+\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$

c) $\left(\frac{\text{Cos}\theta}{2}\right)\mu^2$ d) $(1-\text{Cos }\theta)\mu^2$

e) $(1+\text{Cos }\theta)\mu^2$

11. Calcular:

$$J=\frac{\text{Sen}360°+3\text{Sen}90°-2\text{Cos}^3 180°}{\text{Cos}90°+10\text{Sen}^2 270°\cdot\text{Cos}^3 0°}$$

a) 1 b) 0,1 c) 0,5
d) –0,1 e) –0,5

12. Si: $\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\pi$

Indicar si es (V) o (F)
i) $\text{Sen }\alpha_1 < \text{Sen }\alpha_2$
ii) $\text{Cos }\alpha_1 > \text{Cos }\alpha_2$
iii) $\text{Sen }\alpha_2 \cdot \text{Cos }\alpha_1 > 0$
iv) $\text{Cos }\alpha_2 \cdot \text{Sen }\alpha_1 < 0$
a) FVVF b) FVFV c) VFFF
d) FVVV e) VFVF

13. Indicar la relación posible:

a) $\text{Sen }\alpha = \sqrt{3}$

b) $\text{Cos }\beta = -\sqrt{2}$

c) $\text{Sen }\theta = \sqrt{2}+1$

d) $\text{Cos }\phi = 1-\sqrt{3}$

e) $\text{Sen }\gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

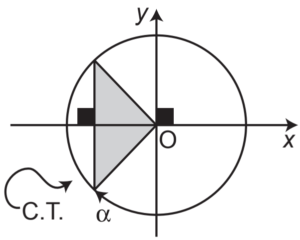
14. Siendo:

$$P = 3\text{Sen}^2\alpha - 5\text{Cos}^2\beta \ ; \ \alpha\neq\beta$$

Encontrar: $P_{máx}\cdot P_{min}$

a) –64 b) –15 c) –2
d) 1 e) 0

15. En la figura, hallar el área de la región sombreada.



a) $0{,}5\text{Sen }\alpha\cdot\text{Cos }\alpha\ \mu^2$
b) $2\text{Sen }\alpha\cdot\text{Cos }\alpha\ \mu^2$
c) $\text{Sen }\alpha\cdot\text{Cos }\alpha\ \mu^2$
d) $-\text{Sen }\alpha\cdot\text{Cos }\alpha\ \mu^2$
e) $-0{,}5\text{Sen }\alpha\cdot\text{Cos }\alpha\ \mu^2$

16. Si: $45° < \theta < 135°$ y $A < \text{Sen }\theta \leq B$
Hallar el valor de:

$$W = (A+B)(A-B)$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. Si: $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$

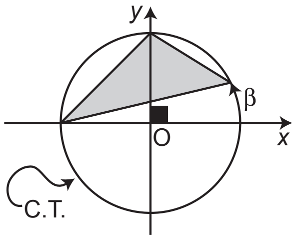
Hallar la extensión de:

$$E = 4\text{Cos }\theta + 1$$

a) <3; 5> b) [3; 5] c) <3; 5]
d) [3;5> e) <0,5;1]

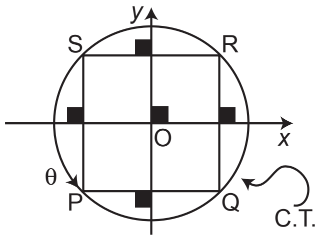
18. Indicar la verdad (V) o Falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
i) Sen 1 < Sen 3 ( )
ii) Cos4 > Cos2 ( )
iii) Sen 5 · Cos 6 > 0 ( )
a) VVV b) FVV c) FFV
d)FFF e)VFF

19. Hallar el área de la región triangular mostrada en la circunferencia trigonométrica.



a) $0{,}5 \cdot \text{Sen}\,\beta \cdot \text{Cos}\,\beta\ u^2$
b) $0{,}5\ (1-\text{Sen}\,\beta - \text{Cos}\,\beta)\ u^2$
c) $0{,}5\ (1+\text{Sen}\,\beta - \text{Cos}\,\beta)\ u^2$
d) $0{,}5\ (1+\text{Sen}\,\beta + \text{Cos}\,\beta)\ u^2$
e) $0{,}5\ (1-\text{Sen}\,\beta + \text{Cos}\,\beta)\ u^2$

20. En la figura, hallar el perímetro del rectángulo PQRS.



a) $-4(\text{Sen}\,\theta + \text{Cos}\,\theta)$
b) $4(\text{Sen}\,\theta + \text{Cos}\,\theta)$
c) $-4(\text{Sen}\,\theta - \text{Cos}\,\theta)$
d) $-4(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)$
e) $4 \cdot \text{Sen}\,\theta \cdot \text{Cos}\,\theta$

CLAVES I				
1. b	2. a	3. d	4. c	5. c
6. c	7. e	8. e	9. e	10. b
11. c	12. b	13. d	14. b	15. c
16. a	17. c	18. d	19. e	20. a

Problemas II

1. Indicar el mayor valor en las siguientes alternativas:
a) Sen 20° b) Sen 70°
c) Sen 100° d) Sen 230°
e) Sen 300°

2. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:
( ) Cos 10° > Cos 50°
( ) Cos 120° > Cos 160°
( ) Cos 290° > Cos 340°
a) VVV b) FFF c) FVF
d) VVF e) VFF

3. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:
( ) Sen 20° > Cos 20°
( ) Cos 190° > Cos 300°
( ) Sen 100° = Cos 350°
a) VVV b) FFF c) FFV
d) VFF e) VVF

4. Hallar la variación de "k"' para que se verifique la igualdad:

$$\text{Sen}\theta = \frac{2k-5}{3}$$

a) $-1 \le k \le 1$ b) $0 \le k \le 3$
c) $0 \le k \le 1$ d) $1 \le k \le 4$
e) $-2 \le k \le 1$

5. Indicar la extensión de "k", si "θ" ∈ IIC; además:

$$\text{Cos}\,\theta = 2k + 3$$

a) $[-1;1]$ b) $\left\langle -2;-\frac{3}{2}\right\rangle$ c) $[0;\ 1]$
d) $\left\langle -\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$ e) <–1;2>

6. Si "α" ∈ $\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{5}\right]$; hallar la extensión de:

$$E = 4\text{Sen}\,\alpha - 3$$

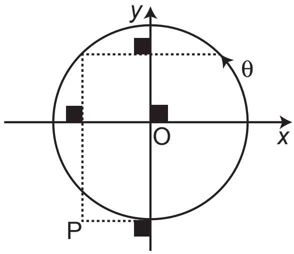
a) $[-1;1]$ b) $[0;\ 1]$ c) $[-3;\ 4]$
d) $[1;\ 2]$ e) $[-2;\ 0]$

7. Siendo "α" y "β" ángulos independientes entre si, hallar la diferencia entre el máximo y mínimo valor de:

$$M = 2Sen\,\alpha + 3Cos^2\beta$$

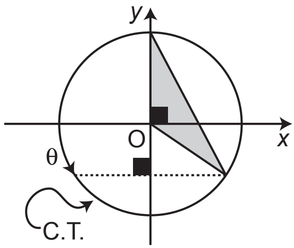
a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

8. En la C.T. mostrada, hallar las coordenadas del punto "P".



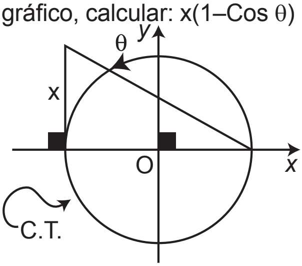
a) (–Sen θ; –1) b) (–1; Cos θ)
c) (–1; –Cos θ) d) (–Cos θ; –1)
e) (Cos θ;–1)

9. Calcular el área de la región sombreada:



a) Sen θ b) Cos θ c) –Cos θ
d) $\frac{1}{2}$ Sen θ e) $-\frac{1}{2}$ Cos θ

10. Del gráfico, calcular: x(1–Cos θ)



a) 2Sen θ b) 3Cos θ c) Tg θ
d) Sen θ e) 2Sec θ

11. Indicar verdadero (V) ó falso (F):
( ) Sen $K\pi = 0$
( ) $Cos(2k+1)\pi = -1$
( ) $Sen(4k+1)\frac{\pi}{2} = 1$

a) VVV b) FFV c) VVF
d) VFV e) VFF

12. Sabiendo que:

$$\sqrt{Sen\,x - 1} + 4^{Cos\,x} = Sen\,y$$

Calcular el valor de:

$$M = Cos\,x + Cos\,y$$

a) –2 b) –1 c) 0
d) 1 e) 2

13. Indicar las alternativas correctas:
I. Sen 1 > Sen 2
II. Cos 3 > Cos 4
III. Cos 6 > Sen 1
a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) Solo II y III

14. Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:

i. $Sen\,4\alpha = \sqrt{3} - 1$

ii. $Cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

iii. $Sen\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

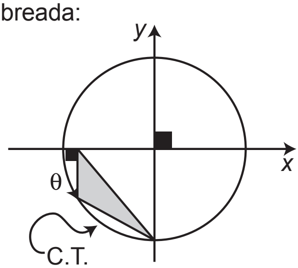
a) VVV b) FFF c) VVF
d) VFV e) FVF

15. Sabiendo que "α" $\in$ <30°; 120°>; hallar la extensión de:

$$M = 2Cos\,2\alpha + 1$$

a) [–1;2> b) [0;3] c) <–2;–1>
d) [–2;2> e) [1;2]

16. Calcular el área de la región sombreada:



a) Csc θ   b) Sen θ

c) –Cos θ   d) $\frac{1}{2}$ Sen θ·Cos θ

e) $\frac{1}{2}$ Cos θ

17. Calcular el máximo valor de:

$$E = (3 - \text{Cos } x)(1 + \text{Cos } x)$$

a) 1   b) 2   c) 3
d) 4   e) 5

18. Hallar la extensión de:

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\text{Sen } x\right)$$

a) [0; 1]   b) [0; 2]   c) [-2; –1]
d) [-2; 0]   e)[1; 2]

19. Si "α" ∈ IIIC, hallar la variación del ángulo agudo "β" para el cual se cumple:

$$\text{Sen}\beta = \frac{\text{Cos}\alpha + 1}{2}$$

a) <10°;45°>   b) <0°;30°>
c) <30°;60°>   d) [30°;45°]
e) <30°;45°>

20. Calcular el máximo valor de:
$M = \text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta + 2(\text{Sen}\alpha + 3\text{Cos }\beta)$
a) 2   b) 4   c) 6
d) 8   e) 10

CLAVES II				
1. c	2. d	3. c	4. d	5. b
6. a	7. d	8. d	9. e	10. a
11. a	12. c	13. c	14. d	15. a
16. d	17. d	18. a	19. b	20. e

UNIDAD 8

Identidades trigonométricas para un mismo arco

Identidad Trigonométrica

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible del ángulo.

Ejemplos

Identidad Algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Identidad Trigonométrica: $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
Ecuación Trigonométrica: $\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta = 1$

Para: $\theta = 90º$ Cumple

Para: $\theta = 30º$ No cumple

Identidades Fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para la demostración de otras identidades más complejas.

Se clasifican en: Pitágoricas
Por cociente
Recíprocas

Identidades pitagóricas

$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$
$1 + \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta$
$1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta$

Sabemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1 \qquad \text{L.q.q.d}$$

Identidades por cociente

$\text{Tan }\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}$
$\text{Cot }\theta = \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

Demostración

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{ORDENADA}}{\text{ABSCISA}} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Identidades recíprocas

$\text{Sen}\theta \bullet \text{Csc}\theta = 1$
$\text{Cos}\theta \bullet \text{Sec}\theta = 1$
$\text{Tan}\theta \bullet \text{Cot}\theta = 1$

Demostración

$$1 = 1$$

$$\frac{y}{r} \bullet \frac{r}{y} = 1$$

$$\text{Sen}\theta \bullet \text{Csc}\theta = 1 \qquad \text{L.q.q.d}$$

Observación:

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

Despejando:	$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$	$\text{Sen}^2\theta = (1 + \text{Cos}\theta)(1 - \text{Cos}\theta)$
Así mismo:	$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta$	$\text{Cos}^2\theta = (1 + \text{Sen}\theta)(1 - \text{Sen}\theta)$

Identidades auxiliares

A) $\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta$

B) $\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \bullet \text{Csc}\theta$

D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \bullet \text{Csc}^2\theta$

E) $(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$

Demostraciones

A) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

al cuadrado:

$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^2 = 1^2$

$\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta + 2\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta = 1$

$$\boxed{\text{Sen}^4\theta + \text{Cos}^4\theta = 1 - 2\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta}$$

B) $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

al cubo:

$(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)^3 = 1^3$

$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta(\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta) = 1$

$\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta + 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta = 1$

$$\boxed{\text{Sen}^6\theta + \text{Cos}^6\theta = 1 - 3\text{Sen}^2\theta \bullet \text{Cos}^2\theta}$$

C) $\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} + \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}$

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}{\text{Cos}\theta \bullet \text{Sen}\theta}$$

$$\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \frac{1 \bullet 1}{\text{Cos}\theta \bullet \text{Sen}\theta}$$

$$\boxed{\text{Tan}\theta + \text{Cot}\theta = \text{Sec}\theta \bullet \text{Csc}\theta}$$

D) $\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \dfrac{1}{\text{Cos}^2\theta} + \dfrac{1}{\text{Sen}^2\theta}$

$$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \frac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}{\text{Cos}^2\theta \bullet \text{Sen}^2\theta}$$

$$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \frac{1 \bullet 1}{\text{Cos}^2\theta \bullet \text{Sen}^2\theta}$$

$$\boxed{\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = \text{Sec}^2\theta \bullet \text{Csc}^2\theta}$$

E) $(1+\text{Sen}\theta+\text{Cos}\theta)^2 = 1^2+(\text{Sen}\theta)^2+(\text{Cos}\theta)^2+2\text{Sen}\theta+2\text{Cos}\theta+2\text{Sen}\theta \bullet \text{Cos}\theta$

$= 1 + \text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta + 2\text{Sen}\theta + 2\text{cos}\theta + 2\text{Sen}\theta \bullet \text{Cos}\theta$

$= 2 + 2\text{Sen}\theta + 2\text{Cos}\theta + 2\text{Sen}\theta \bullet \text{Cos}\theta$

Agrupando convenientemente:
$= 2(1 + \text{Sen}\theta) + 2\text{Cos}\theta(1 + \text{Sen}\theta)$
$= (1 + \text{Sen}\theta)(2 + 2\text{Cos}\theta)$
$= 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$

Finalmente:

$$\boxed{(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = 2(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)}$$

Problemas para demostrar

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta son equivalentes. Para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos:

1. Se escoge el miembro "más complicado".
2. Se lleva a Senos y Cosenos (por lo general).
3. Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas.

Ejemplos

1) Demostrar:

$$\text{Secx}\bullet(1 - \text{Sen}^2x)\bullet\text{Cscx} = \text{Cotx}$$

Se escoge el 1er miembro:

$$\text{Secx}\bullet(1 - \text{Sen}^2x)\bullet\text{Cscx} =$$

Se lleva a senos y cosenos:

$$\frac{1}{\text{Cosx}}\bullet(\text{Cos}^2x)\bullet\frac{1}{\text{Senx}} =$$

Se efectúa: $\text{Cosx}\bullet\frac{1}{\text{Senx}} =$

$$\text{Cotx} = \text{Cotx}$$

2) Demostrar:

$$[\text{Secx} + \text{Tanx} - 1][1 + \text{Secx} - \text{Tanx}] = 2\text{Tanx}$$

Se escoge el 1er miembro:

$$[\text{Secx} + \text{Tanx} - 1][\text{Secx} - \text{Tanx} + 1] =$$
$$[\text{Secx} + (\text{Tanx} - 1)][\text{Secx} - (\text{Tanx} - 1)] =$$

Se efectua:

$$(\text{Secx})^2 - (\text{Tanx} - 1)^2 =$$
$$(1 + \text{Tan}^2x) - (\text{Tan}^2x - 2\text{Tanx} - 1) =$$
$$1 + \text{Tan}^2x - \text{Tan}^2x + 2\text{Tanx} - 1 =$$
$$2\text{Tanx} = 2\text{Tanx}$$

Problemas para simplificar y reducir

Ejemplos

1) Reducir:

$$K = Sen^4x - Cos^4x + 2Cos^2x$$

Por diferencia de cuadrados

$K = (\overbrace{Sen^2x + Cos^2x}^{1})\ (Sen^2x - Cos^2x) + 2Cos^2x$

$K = Sen^2x - Cos^2x + 2Cos^2x$

$K = Sen^2x + Cos^2x$ $\qquad\qquad K = 1$

2) Simplificar:

$$E = \frac{1+Cosx}{Senx} - \frac{Senx}{1-Cosx}$$

$$E = \frac{\overbrace{(1+Cosx)(1-Cosx)}^{1-Cos^2x} - (Senx)(Senx)}{Senx(1-Cosx)}$$

$$E = \frac{\cancel{Sen^2x} - \cancel{Sen^2x}}{Senx(1-Cosx)} \qquad\qquad E = \frac{0}{Senx(1-Cosx)}$$

$E = 0$

Problemas condicionales

Dada una o varias condiciones se pide hallar una relación en términos de dicha o dichas condiciones.

Ejemplos

Si $Senx + Cosx = \dfrac{1}{2}$. Hallar: Senx•Cosx

Resolución

Del dato: $\qquad (Senx + Cosx)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$Sen^2x + Cos^2x + 2Senx \cdot Cosx = \frac{1}{4}$$

$$2\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = \frac{1}{4} - 1$$

$$2\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Senx} \cdot \text{Cosx} = -\frac{3}{8}$$

Problemas para eliminar ángulos

La idea central es eliminar todas las expresiones algebraicas, y que al final se den relaciones independientes de la variable.

Ejemplos

Eliminar "x" a partir de: Senx = a

Cosx = b

Resolución

De: Senx = a

Cosx = b

$$\left.\begin{array}{r} \text{Sen}^2x = a^2 \\ \text{Cos}^2x = b^2 \end{array}\right\} \text{Sumamos}$$

$$\begin{array}{r} \text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = a^2 + b^2 \\ \hline 1 = a^2 + b^2 \end{array}$$

Resumen de fórmulas

Fundamentales

PITAGÓRICAS

$$\boxed{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1} \rightarrow \text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta; \quad \text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta$$

$$\boxed{1 + \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta} \rightarrow \text{Tan}^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1; \quad \text{Sec}^2\theta - \text{Tan}^2\theta = 1$$

$$\boxed{1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta} \rightarrow \text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta - 1; \quad \text{Csc}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1$$

DE COCIENTE

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{Sen}\theta}$$

RECÍPROCAS

$$\boxed{\operatorname{Sen}\theta \cdot \operatorname{Csc}\theta = 1} \quad \operatorname{Sen}\theta = \frac{1}{\operatorname{Csc}\theta} \qquad \operatorname{Csc}\theta = \frac{1}{\operatorname{Sen}\theta}$$

$$\boxed{\cos\theta \cdot \sec\theta = 1} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\tan\theta \cdot \cot\theta = 1} \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Auxiliares

$\operatorname{Sen}^4\theta + \cos^4\theta$	$= 1 - 2\operatorname{Sen}^2\theta \cdot \cos^2\theta$
$\operatorname{Sen}^6\theta + \cos^6\theta$	$= 1 - 3\operatorname{Sen}^2\theta \cdot \cos^2\theta$
$\tan\theta + \cot\theta$	$= \sec\theta \cdot \operatorname{Csc}\theta$
$\sec^2\theta + \operatorname{Csc}^2\theta$	$= \sec^2\theta \cdot \operatorname{Csc}^2\theta$
$(1 \pm \operatorname{Sen}\theta \pm \cos\theta)^2$	$= 2(1 \pm \operatorname{Sen}\theta)(1 \pm \cos\theta)$

Problemas I

1. Reducir:
   $(Sen\,x + Cos\,x)^2 + (Sen\,x - Cos\,x)^2$
   a) 1 b) 2
   c) 2Sen x Cos x d) 4Sen x Cos x
   e) 4

2. Simplificar:
   $(Csc\,x - Ctg\,x)(1 + Cos\,x)$
   a) 1 b) Sen x c) Cos x
   d) Sen^2x e) Cos^2x

3. Reducir:
   $(Sen\,x + Cos\,x \cdot Ctg\,x)Sen\,x$
   a) Tg x b) Ctg x c) 1
   d) Sec x e) Csc x

4. Reducir:
   $(Sec\,x - Cos\,x)Ctg\,x$
   a) 1 b) Sen x c) Sen^2x
   d) Sec x e) Cos^2x

5. Hallar "k" de la siguiente identidad:
   $$\frac{Senx}{1+Cosx}+\frac{1+Cosx}{Senx}=\frac{2}{k}$$
   a) Sen x b) Cos x c) Tg x
   d) Sec x e) Csc x

6. Reducir la expresión:
   $(Sen^2x - Cos^2x)Csc^2x + Ctg^2x$
   a) 0 b) 1 c) 2
   d) 3 e) 4

7. Reducir:
   $$\frac{Secx - Cosx}{Cscx - Senx}$$
   a) Tg x b) Tg^2x c) Tg^3x
   d) Ctg^2x e) Ctg^3x

8. Simplificar:
   $$Tgx+\frac{Cosx}{1+Senx}$$
   a) 2 b) 2Sec x c) 2Csc x
   d) Sec x e) Csc x

9. Hallar "A" en la identidad:
   $$\sqrt{\frac{1+Senx}{1-Senx}} = A + Tg\,x$$
   a) Sen x b) Cos x c) Ctg x
   d) Sec x e) Csc x

10. Reducir la expresión:
    $Csc\,x(Csc\,x+Sen\,x) - Ctg\,x(Ctg\,x-Tg\,x)$
    a) 0 b) 1 c) 2
    d) 3 e)4

11. Reducir:
    $$\frac{Sen^3x+Cos^3x}{1-Senx\cdot Cosx}-Cosx$$
    a) Sen x b) Cos x c) Tg x
    d) Ctg x e) Sec x

12. Reducir.
    $$\frac{1}{Secx+Tgx}+\frac{1}{Ctgx}$$
    a) Sen x b) Cos x c) Sec x
    d) Csc x e) Tg x

13. Si: Tg x + Ctg x = 3
    Hallar:
    $Tg^4x + Ctg^4x$
    a) 41 b) 43 c) 45
    d) 47 e) 49

14. Si: Tg x + Ctg x = 3
    Hallar: $(Sen\,x + Cos\,x)^2$
    a) 5 b) 5/2 c) 5/3
    d) 5/4 e) 5/6

15. Si: Sen x + Cos x = n
    Hallar:
    Tg x + Ctg x + Sec x + Csc x
    a) n+1 b) n -1 c) $\frac{2}{n+1}$
    d) $\frac{2}{n-1}$ e) $\frac{1}{n-1}$

16. Si la expresión es independiente de "x", hallar: $\frac{a}{b}$
    $3a(Sen^4x+Cos^4x)+b(Sen^6x + Cos^6x)$
    a) 1/5 b) -1/3 c) -1/2
    d) -2/3 e) 5/2

17. Si: $Cos\,x = \frac{1}{a+b}$; $Ctg\,x = \frac{1}{a-b}$
    Eliminar "x"
    a) ab = 1 b) 2ab = 1 c) 3ab = 1
    d) 4ab = 1 e) 5ab = 1

18. Simplificar:
    (Sec x + Tg x - 1)(Sec x – Tg x + 1)
    a) 2Sen x b) 2Cos x c) 2Tg x
    d) 2Sec x e) 2Csc x

19. Simplificar:

$$\text{Sec x}\cdot\text{Csc x} - \text{Ctg x} + \frac{1}{\text{Sec x} + \text{Tg x}}$$

    a) Sen x b) Cos x c) Sec x
    d) Csc x e) Ctg x

20. Si: 5Sec x – 4Tg x = 3
    Calcular:
    A = Sen x + Cos x
    a) 1,0 b) 1,2 c) 1,4
    d) 1,6 e) 1,8

CLAVES I				
1. b	2. b	3. c	4. b	5. a
6. b	7. c	8. d	9. d	10. d
11. a	12. c	13. d	14. c	15. d
16. c	17. d	18. c	19. c	20. c

Problemas II

1. Simplificar:

$$P = \frac{(\text{Senx} + \text{Cosx})(\text{Senx} - \text{Cosx})}{\text{Sen}^4\text{x} - \text{Cos}^4\text{x}}$$

   a) 0 b) 1 c) –1
   d) Sen²x e) Cos²x

2. Reducir:

$$Q = \frac{(1+\text{Senx})^{-1} + (1-\text{Senx})^{-1}}{(1-\text{Cosx})^{-1} + (1+\text{Cosx})^{-1}}$$

   a) 1 b) Tan x c) Cot x
   d) Tan²x e) Cot²x

3. Reducir:

$$W = \frac{\text{Secx}(\text{Secx} - \text{Cosx}) + \text{Cscx}(\text{Cscx} - \text{Senx})}{\text{Cotx}(\text{Tanx} - \text{Cotx}) - \text{Tanx}(\text{Cotx} + \text{Tanx})}$$

   a) –1 b) 1 c) –2
   d) 2 e) 0

4. Reduzca:

$$J = \frac{\text{Sec}^2\text{x} - 2\text{Sen}^2\text{x} - \text{Tan}^2\text{x}}{\text{Csc}^2\text{x} - 2\text{Cos}^2\text{x} - \text{Cot}^2\text{x}}$$

   a) –2 b) 2 c) –1
   d) 1 e) 0

5. Hallar “n” en la siguiente identidad trigonométrica:
   $(1+\text{Tan x})^2+(1+\text{Cotx})^2=(\text{Secx}+\text{Cscx})^n$
   a) 0 b) 1 c) 2
   d) 3 e) 4

6. Reducir:

$$H = \frac{\text{Sen}^4\text{x}(1+\text{Sen}^2\text{x}) + \text{Cos}^4\text{x}(1+\text{Cos}^2\text{x}) - 2}{\text{Sen}^4\text{x}(1-\text{Sen}^2\text{x}) + \text{Cos}^4\text{x}(1-\text{Cos}^2\text{x})}$$

   a) 1 b) 5 c) –1
   d) –5 e) $-\frac{1}{5}$

7. Reducir:

$$U = \frac{(1+\text{Senx} - \text{Cosx})^2}{(2+2\text{Senx})} - \frac{(1-\text{Senx} + \text{Cosx})^2}{(2+2\text{Cosx})}$$

   a) 0 b) 2
   c) Cos x– Sen x d) Sen x + Cos x
   e) Sen x – Cos x

8. Indicar el equivalente de:

$$M = \left(\frac{\text{Cosx}}{1-\text{Senx}} - \frac{1}{\text{Cotx}}\right)^2 \bullet \left(\frac{\text{Senx}}{1+\text{Cosx}} + \frac{1}{\text{Tanx}}\right)^2$$

   a) Tan²x+Cot²x
   b) Sec²x+Cos²x
   c) Sen²x+Csc²x
   d) Sec²x+Csc²x
   e) 1

9. Simplificar:

$$L = \frac{(2\text{Tanx} + \text{Secx})(\text{Cscx} - \text{Senx})}{\text{Cotx} + 2\text{Cosx}}$$

   a) 1 b) Cos²x c) Cos⁴x
   d) Tan²x e) Cot²x

10. Siendo: Sen x · Cos x = $\frac{3}{8}$
    Hallar:

$$T = \frac{\text{Senx} + \text{Cosx}}{\text{Senx} - \text{Cosx}}$$

    a) 1 b) 7 c) $\frac{1}{7}$
    d) $\sqrt{7}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

11. Calcular:

$$Y=\frac{(Sen3^\circ+\cos 3^\circ)^2+(Sen3^\circ-Cos3^\circ)^2}{(Tan1^\circ+Cot1^\circ)^2-(Tan1^\circ-Cot1^\circ)^2}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1
d) 2 e) 3

12. Simplificar:

$$P=\frac{Csc^2x+Sen^2x-1}{Sec^2x+Cos^2x-1}$$

a) 1 b) Cot^2x c) Tan^2x
d) Cot^6x e) Tan^6x

13. Simplificar:

$$W=\frac{[Secx+Tanx+1]\cdot[Secx-Tanx-1]}{[Cscx+Cotx-1]\cdot[Cscx-Cotx+1]}$$

a) $-Tan^2x$ b) Tan^2x c) 1
d) $-Cot^2x$ e) Cot^2x

14. Siendo:
(Sec A + Tan A) (Csc B – Cot B) = k
Hallar:
(Tan A – Sec A)(Cot B + Csc B)
a) 1 b) –k c) $-k^{-1}$
d) k e) k^{-1}

15. Reducir:
$Q = 1 - Tan^2x + Tan^4x - Tan^6x + \ldots$
a) Tan^2x b) Sec^2x c) Csc^2x
d) Cos^2x e) Sen^2x

16. Sabiendo que:
Sen x + Cos x = m
Hallar:

$$V=\frac{Sec^2x+Csc^2x-1}{Tanx+Cotx-1}$$

a) $\frac{2}{m^2-1}$ b) $\frac{1+m^2}{1-m^2}$ c) $\frac{m^2-1}{m^2+1}$
d) $\frac{1-m^2}{1+m^2}$ e) $\frac{m^2+1}{m^2-1}$

17. Calcular:

$$F=2\sqrt{1-2Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot Sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}+1$
d) $1-\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}-1$

18. Simplificar:

$$H=\sqrt[3]{\frac{Tan^2x-Sen^2x}{Cot^2x-Cos^2x}}$$

a) 1 b) Tan^2x c) Cot^2x
d) Tan^6x e) Cot^6x

19. Dado:
Tan x – Cot x = 3
Halle:
$J = Tan^3x - Cot^3x$
a) 12 b) 15 c) 27
d) 33 e) 36

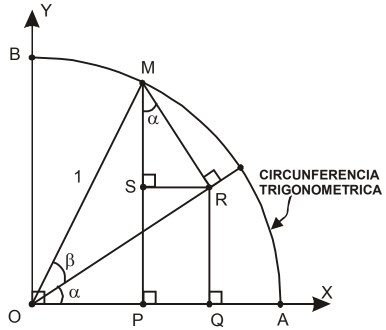
20. Si: Cos x(1+Cos x) = 1
Hallar:
$M = Csc^2x + Cos^2x$
a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$
d) 2 e) 4

CLAVES II				
1. b	2. d	3. a	4. c	5. c
6. d	7. e	8. d	9. a	10. d
11. b	12. b	13. a	14. c	15. d
16. e	17. e	18. b	19. e	20. d

Identidades trigonométricas para el arco compuesto

Identidades trigonométricas para la suma de dos arcos

A partir del gráfico:



$Sen(\alpha + \beta) = ?$

$$Sen(\alpha + \beta) = MP = PS + SM = QR + SM$$

$\triangle OQR \quad OQ = \underbrace{OR}_{Cos\beta} Sen\alpha = Sen\alpha \cdot Cos\beta$

$\triangle MSR \quad SR = \underbrace{MR}_{Sen\beta} Cos\alpha = Cos\alpha \cdot Sen\beta$

Luego:

$$\boxed{Sen(\alpha + \beta) = Sen\alpha \cdot Cos\beta + Cos\alpha \cdot Sen\beta}$$

$Cos(\alpha + \beta) = ?$

$$Cos(\alpha + \beta) = OP = OQ - PQ = OQ - SR$$

$\triangle OQR \quad OR = \underbrace{OR}_{Cos\beta} Cos\alpha = Cos\alpha \cdot Cos\beta$

$\triangle MSR \quad SM = \underbrace{MR}_{Sen\beta} Sen\alpha = Sen\alpha \cdot Sen\beta$

Luego:

$$\boxed{Cos(\alpha + \beta) = Cos\alpha \cdot Cos\beta - Sen\alpha \cdot Sen\beta}$$

Tan(α + β) = ?

$$\text{Tan}(\alpha+\beta)=\frac{\text{Sen}(\alpha+\beta)}{\text{Cos}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta+\text{Cos}\alpha\bullet\text{Sen}\beta}{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta-\text{Sen}\alpha\bullet\text{Sen}\beta}$$

Dividiendo a la expresión por CosαCosβ

$$\text{Tan}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}+\dfrac{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Sen}\beta}{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}}{\dfrac{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}-\dfrac{\text{Sen}\alpha\bullet\text{Sen}\beta}{\text{Cos}\alpha\bullet\text{Cos}\beta}}$$

Luego:

$$\boxed{\text{Tan}(\alpha+\beta)=\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta}}$$

Observaciones

Cot(α + β)	$=\dfrac{1}{\text{Tan}(\alpha+\beta)}$
Sec(α + β)	$=\dfrac{1}{\text{Cos}(\alpha+\beta)}$
Csc(α + β)	$=\dfrac{1}{\text{Sen}(\alpha+\beta)}$

Ejemplos

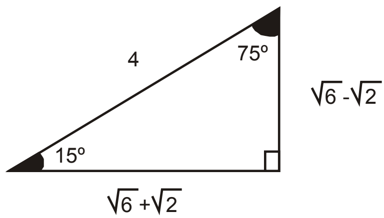
Sen 75º = ?

Sen(45º + 30º) = Sen45º • Cos30º + Sen30º • Cos45º

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

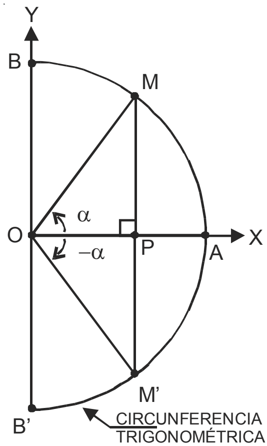
$$\text{Sen}75^{\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



De la circunferencia trigonométrica se observa que:

* $Sen(-\alpha) = M'P$
  $Sen(\alpha) = MP$
  $M'P = -MP$ $\quad\quad Sen(-\alpha) = -Sen\alpha$

* $Cos(-\alpha) = OP$ $\quad\quad Cos(-\alpha) = Cos\alpha$
  $Cos(\alpha) = OP$



Asi mismo:

* $Cot(-\alpha) = -Cot\alpha$
* $Sec(-\alpha) = Sec\alpha$
* $Csc(-\alpha) = -Csc\alpha$
* $Tan(-\alpha) = -Tan\alpha$

Identidades trigonométricas para la diferencia de dos arcos

$Sen(\alpha - \beta) = ?$

$$Sen[\alpha + (-\beta)] = Sen\alpha \bullet \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\beta} + Cos\alpha \bullet \underbrace{Sen(-\beta)}_{-Sen\beta}$$

Luego:

$$\boxed{Sen(\alpha - \beta) = Sen\alpha \bullet Cos\beta - Cos\alpha \bullet Sen\beta}$$

$Cos(\alpha - \beta) = ?$

$$Cos[\alpha + (-\beta)] = Cos\alpha \bullet \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\beta} - Sen\alpha \bullet \underbrace{Sen(-\beta)}_{-Sen\beta}$$

Luego:

$$\boxed{Cos(\alpha - \beta) = Cos\alpha \bullet Cos\beta + Sen\alpha \bullet Sen\beta}$$

$Tan(\alpha - \beta) = ?$

$$Tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{Tan\alpha + \overbrace{Tan(-\beta)}^{-Tan\beta}}{1 - Tan\alpha \bullet \underbrace{Tan(-\beta)}_{-Tan\beta}}$$

Luego:

$$\boxed{Tan(\alpha - \beta) = \frac{Tan\alpha - Tan\beta}{1 + Tan\alpha \bullet Tan\beta}}$$

Observaciones:

Así mismo:

$Cot(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{Tan(\alpha-\beta)}$
$Sec(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{Cos(\alpha-\beta)}$
$Csc(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{Sen(\alpha-\beta)}$

Ejemplos

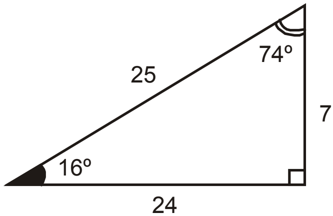
Cos16º = ?

$$Cos(53º-37º)=Cos53º\bullet Cos37º+Sen53º\bullet Sen37º$$

$$=\frac{3}{5}\bullet\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\bullet\frac{3}{5}$$

$$=\frac{12}{25}+\frac{12}{25}$$

$$Cos16º=\frac{24}{25}$$

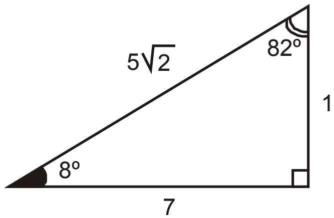


Tan8º = ?

$$Tan(45º-37º)=\frac{Tan45º-Tan37º}{1+Tan45º\bullet Tan37º}$$

$$=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+1\bullet\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}$$

$$Tan8º=\frac{1}{7}$$



Propiedades

$$\boxed{Sen(\alpha+\beta)\bullet Sen(\alpha-\beta)=Sen^2\alpha-Sen^2\beta}$$

Demostración

Sabemos que:

* $Sen(\alpha+\beta)=Sen\alpha\bullet Cos\beta+Cos\alpha\bullet Sen\beta$ i
* $Sen(\alpha-\beta)=Sen\alpha\bullet Cos\beta-Cos\alpha\bullet Sen\beta$ ii

Multiplicando miembro a miembro i •ii, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\text{Sen}(\alpha+\beta)\bullet\text{Sen}(\alpha-\beta) &= [(\text{Sen}\alpha\bullet\text{Cos}\beta)^2-(\text{Cos}a\bullet\text{Sen}\beta)^2]\\
&= \text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Cos}^2\beta-\text{Cos}^2a\bullet\text{Sen}^2\beta\\
&= \text{Sen}^2\alpha\bullet(1-\text{Sen}^2\beta)-(1-\text{Sen}^2\alpha)\bullet\text{Sen}^2\beta\\
&= \text{Sen}^2\alpha-\text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Sen}^2\beta-\text{Sen}^2\beta+\text{Sen}^2\alpha\bullet\text{Sen}^2\beta
\end{aligned}
$$

$$\text{Sen}(\alpha+\beta)\bullet\text{Sen}(\alpha-\beta)=\text{Sen}^2\alpha-\text{Sen}^2\beta \quad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $\text{Sen}(45^\circ+\theta)\bullet\text{Sen}(45^\circ-\theta)=\text{Sen}^2 45^\circ-\text{Sen}^2\theta=\frac{1}{2}-\text{Sen}^2\theta$
- $\text{Sen}^2 3x-\text{Sen}^2 2x=\text{Sen}(3x+2x)\bullet\text{Sen}(3x-2x)=\text{Sen}5x\bullet\text{Sen}x$

$$\boxed{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta+\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta=\text{Tan}(\alpha+\beta)}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta}=\text{Tan}(\alpha+\beta)$$

$$
\begin{aligned}
\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta &= \text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet[1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta]\\
\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta &= \text{Tan}(\alpha+\beta)-\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta
\end{aligned}
$$

$$\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta+\text{Tan}(\alpha+\beta)\bullet\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta=\text{Tan}(\alpha+\beta) \quad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $M=\text{Tan}2\theta+\underbrace{\text{Tan}\theta}_{\text{Tan}(2\theta+\theta)}+\text{Tan}3\theta\bullet\text{Tan}2\theta\bullet\text{Tan}\theta \qquad M=\text{Tan}(2\theta+\theta)$

  $M=\text{Tan }3\theta$

- $N=\text{Tan}70^\circ+\underbrace{\text{Tan}10^\circ}_{\text{Tan}(70^\circ+10^\circ)}+\text{Tan}80^\circ\bullet\text{Tan}70^\circ\bullet\text{Tan}10^\circ \qquad N=\text{Tan}(70^\circ+10^\circ)$

  $N=\text{Tan }80^\circ$

- $P=\text{Tan}55^\circ+\underbrace{\underbrace{\text{Tan}5^\circ+\sqrt{3}}_{\text{Tan}60^\circ}}_{\text{Tan}(55^\circ+5^\circ)}\bullet\text{Tan}55^\circ\bullet\text{Tan}5^\circ \qquad P=\text{Tan}(55^\circ+5^\circ)$

  $P=\text{Tan}60^\circ=\sqrt{3}$

- $Q = \text{Tan}13^\circ + \text{Tan}32^\circ + \text{Tan}13^\circ \bullet \text{Tan}32^\circ$

$$Q = \text{Tan}13^\circ + \text{Tan}32^\circ + \underbrace{\underbrace{1}_{\text{Tan}45^\circ}}_{\text{Tan}(13^\circ+32^\circ)} \bullet \text{Tan}13^\circ \bullet \text{Tan}32^\circ \qquad Q = \text{Tan}(13^\circ + 32^\circ)$$

$$Q = \text{Tan}45^\circ = 1$$

$$\boxed{\text{Si: } \alpha + \beta + \theta = 180^\circ \qquad \text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta}$$

Demostración

Por condición: $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \theta$$

$$\text{Tan}(\alpha + \beta) = \text{Tan}(180^\circ - \theta)$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta}{1 - \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta} = -\text{Tan}\theta$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta = -\text{Tan}\theta \bullet (1 - \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta)$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta = -\text{Tan}\theta + \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta$$

$$\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \bullet \text{Tan}\beta \bullet \text{Tan}\theta \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

En un ΔABC, así: Tan A = 3 y Tan B = 2; Hallar "Tan C"

Resolución

En todo ΔABC:

$A + B + C = 180^\circ$, entonces

se cumplirá:

$$\underbrace{\text{TanA}}_{3} + \underbrace{\text{TanB}}_{2} + \underbrace{\text{TanC}}_{?} = \underbrace{\text{TanA}}_{3} \bullet \underbrace{\text{TanB}}_{2} \bullet \underbrace{\text{TanC}}_{?}$$

Reemplazando datos: $3 + 2 + \text{TanC} = 3 \bullet 2 \bullet \text{TanC}$

$$5 + \text{TanC} = 6 \bullet \text{TanC}$$

$$5 = 5 \bullet \text{TanC}$$

$$\text{TanC} = 1$$

Ejemplos

Calcular:

$$E = \text{Tan}\frac{\pi}{7} + \text{Tan}\frac{2\pi}{7} + \text{Tan}\frac{4\pi}{7} - \text{Tan}\frac{\pi}{7} \bullet \text{Tan}\frac{2\pi}{7} \bullet \text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

Resolución

Se nota que: $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$

$$\text{Tan}\frac{\pi}{7}+\text{Tan}\frac{2\pi}{7}+\text{Tan}\frac{4\pi}{7}=\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\text{Tan}\frac{2\pi}{7}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

Reemplazamos:

$$E=\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\cancel{\text{Tan}\frac{2\pi}{7}}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}-\text{Tan}\frac{\pi}{7}\bullet\cancel{\text{Tan}\frac{2\pi}{7}}\bullet\text{Tan}\frac{4\pi}{7}$$

$E = 0$

Si: $\alpha+\beta+\theta=90^\circ$	$\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta=1$

Demostración

Por condición:

$$\alpha+\beta+\theta=90^\circ$$

$$\alpha+\beta=90^\circ-\theta$$

$$\text{Tan}(\alpha+\beta)=\text{Tan}(90^\circ-\theta)$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta}=+\text{Cot}\theta$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta}{1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta}=\frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

$$(\text{Tan}\alpha+\text{Tan}\beta)\bullet\text{Tan}\theta=1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta$$

$$\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta=1-\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta$$

$\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\beta+\text{Tan}\beta\bullet\text{Tan}\theta+\text{Tan}\alpha\bullet\text{Tan}\theta=1$ L.q.q.d

Ejemplo

Calcular:

$$W=\text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}30^\circ+\text{Tan}30^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ+\text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ$$

Notamos que:

$20^\circ+30^\circ+40^\circ=90^\circ$, entonces

Se cumple que:

$$\underbrace{\text{Tan}20^\circ\bullet\text{Tan}30^\circ+\text{Tan}30^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ+\text{Tan}\,20^\circ\bullet\text{Tan}40^\circ}_{W}=1$$

$W = 1$

Resumen de fórmulas

Básicas

* $\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\beta \pm \text{Cos}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
* $\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta \mp \text{Sen}\alpha \cdot \text{Sen}\beta$
* $\text{Tan}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\text{Tan}\alpha \pm \text{Tan}\beta}{1 \mp \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta}$

Observaciones

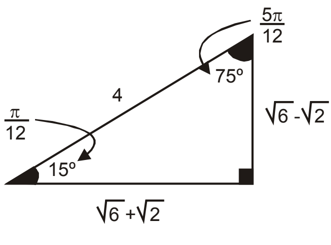
* $\text{Cot}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Tan}(\alpha \pm \beta)}$
* $\text{Sec}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Cos}(\alpha \pm \beta)}$
* $\text{Csc}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1}{\text{Sen}(\alpha \pm \beta)}$

Propiedades

- $\text{Sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}^2\alpha - \text{Sen}^2\beta$
- $\text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}(\alpha + \beta) \cdot \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta = \text{Tan}(\alpha + \beta)$
- Si: $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ $\quad \text{Tan}\alpha + \text{Tan}\beta + \text{Tan}\theta = \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}\theta$
- Si: $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$ $\quad \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\beta + \text{Tan}\beta \cdot \text{Tan}\theta + \text{Tan}\alpha \cdot \text{Tan}\theta = 1$

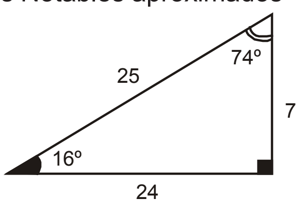
Notas

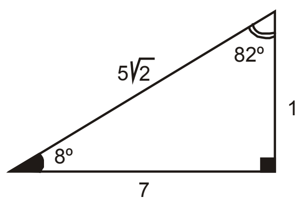
- ⊿ Notable exacto



$\measuredangle$ / R.T.	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$
Sen y Cos	$\frac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$
Tan y Cot	$2 \mp \sqrt{3}$	$2 \pm \sqrt{3}$
Sec y Csc	$\sqrt{6} \mp \sqrt{2}$	$\sqrt{6} \pm \sqrt{2}$

- ⊿s Notables aproximados





Problemas I

1. Si: $\text{Sen}\,\alpha = \dfrac{12}{13}$ ^ $\text{Cos}\,\beta = \dfrac{4}{5}$; α y β ángulos agudos.
   Calcular:
   $\text{Sen}(\alpha+\beta)$ = ...
   $\text{Cos}(\alpha+\beta)$ = ...
   $\text{Tan}(\alpha+\beta)$ = ...

2. Si: $\text{Cos}\,\theta = \dfrac{8}{17}$ ^ $\text{Sen}\,\phi = \dfrac{7}{25}$; θ y ϕ ángulos agudos
   Calcular:
   $\text{Sen}\,(\theta-\phi)$ = ...
   $\text{Cos}\,(\theta-\phi)$ = ...
   $\text{Tan}(\theta-\phi)$ = ...

3. El valor simplificado de:
   es: $E = \dfrac{2\text{Sen}(30^\circ + x) - \text{Cos}x}{\text{Sen}x}$

   a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$
   d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 2

4. Calcular el valor de:
   $E = (\text{Cos}70^\circ+\text{Cos}10^\circ)^2+(\text{Sen}70^\circ+\text{Sen}10^\circ)^2$
   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) $\dfrac{1}{2}$

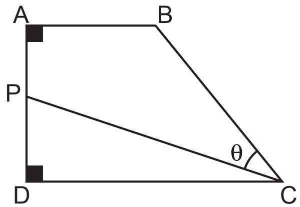
5. ¿A qué es igual?
   $E = \text{Sen}(15^\circ+x)\cdot\text{Cos}\,x - \text{Cos}(15^\circ+x)\cdot\text{Sen}\,x$

   a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$
   d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e)0

6. La expresión:
   $$E = \frac{\text{Sen}9^\circ\cdot\text{Cos}6^\circ + \text{Cos}9^\circ\cdot\text{Sen}6^\circ}{\text{Cos}9^\circ\cdot\text{Cos}6^\circ - \text{Sen}9^\circ\cdot\text{Sen}6^\circ}$$
   es igual a:
   a) 1 b) $2+\sqrt{3}$ c) $2-\sqrt{3}$
   d) $2\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

7. Si: $\text{Sen}\,15^\circ = \dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}$
   Indica el valor de: (b - a)
   a) –1 b) 1 c) 2
   d) –2 e) 3

8. Si: $\overline{AB}=AP=2\sqrt{2}$;
   $AD=\overline{DC}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$
   Hallar: Cos θ



   a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$
   d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. Hallar: $\sqrt{\dfrac{\theta}{a}}$
   $\text{Sen}5^\circ+\text{Cos}\,5^\circ=\sqrt{a}\,\text{Sen}\theta^\circ$; $0^\circ<\theta^\circ<90^\circ$
   a) 1 b) 3 c) 5
   d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{1}{5}$

10. Hallar: $\sqrt{\dfrac{\theta}{10a}}$

Sen 20°+ $\sqrt{3}$ Cos 20° = aSen θ° ; 0°<θ°<90°

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. ¿A qué es igual?

$$E = 2\text{Sen } 20° + \sqrt{3}\text{ Sen } 10°$$

a) Sen 20° b) Tan 10° c) Cos 10°
d) Tan 20° e) Cos 20°

12. El valor de:

$$E = \text{Cos } 40° - 2\text{Cos } 50° \cdot \text{Cos } 10°$$

es:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. ¿A qué es igual?

$$E = \frac{\text{Cot}70° + \text{Tan}25°}{1 - \text{Cot}70° \cdot \text{Tan}25°}$$

a) –1 b) 1 c) $\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. El valor de:

$$E = \frac{\text{Tan}\frac{\pi}{5} - \text{Tan}\frac{\pi}{30}}{1 + \text{Tan}\frac{\pi}{5} \cdot \text{Tan}\frac{\pi}{30}}$$

es:

a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) –1
d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\sqrt{3}$

15. Calcular el valor de:

$$E = \frac{\text{Tan}50° - \text{Tan}40°}{4\text{Tan}10°}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{2}$

16. ¿A qué es igual?

$$E = \frac{\text{Tan}2°}{\text{Tan}46° - \text{Tan}44°}$$

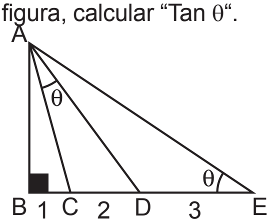
a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$
d) –2 e) 1

17. Calcular el valor aproximado de:

$$E = 117\text{ Tan } 21° + 31\text{ Tan } 29°$$

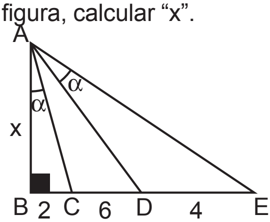
a) 59 b) 60 c) 61
d) 62 e) 63

18. En la figura, calcular "Tan θ".



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$
d) 2 e) 3

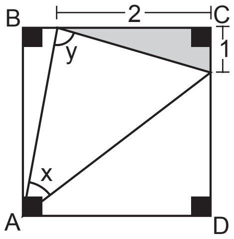
19. En la figura, calcular "x".



a) $4\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{6}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{2}$

20. Si ABCD es un cuadrado de lado "3". ¿A qué es igual?

$$E = \frac{\text{Sen}(x - y)}{7\text{Cos}x \cdot \text{Cos}y}$$



a) $\frac{8}{9}$ b) $-\frac{9}{10}$ c) $-\frac{8}{9}$
d) $\frac{9}{10}$ e) $-\frac{10}{9}$

CLAVES I				
1.*	2.*	3. b	4. c	5. b
6. c	7. b	8. b	9. c	10. b
11. c	12. a	13. b	14. b	15. a
16. b	17. c	18. b	19. b	20. c

Problemas II

1. Calcule aproximadamente: Tg 24°

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{7}{24}$ c) 7
d) $\frac{73}{161}$ e) $\frac{161}{73}$

2. Reducir la expresión:

$A = [\text{Sen}(\alpha+\beta) - \text{Sen}(\alpha-\beta)]\ \text{Sec}\ \alpha$

a) 2Sen β b) Cos β c) Sen α
d) Cos α e) 1

3. Halle el valor de la expresión:

Cos(x-y) - 2Sen x · Sen y ;0°<x,y<90°

Si: Sen x = Cos y

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{4}{5}$

4. El valor de la expresión:

$$\frac{\text{Sen}67° \cdot \text{Cos}14° - \text{Sen}14° \cdot \text{Cos}67°}{\text{Cos}38° \cdot \text{Cos}22° - \text{Sen}38° \cdot \text{Sen}22°}$$

es:

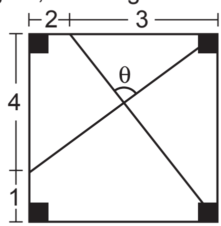
a) 0,2 b) 0,4 c) 0,5
d) 1,2 e) 1,6

5. Calcular:

$$\frac{\text{Tg}(50° + x) + \text{Tg}(10° - x)}{1 - \text{Tg}(50° + x)\text{Tg}(10° - x)}$$

a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$
d) Tg x e) $\frac{3}{4}$

6. De la figura, halle: Tg θ



a) $\frac{37}{5}$ b) $\frac{5}{37}$ c) $\frac{13}{31}$
d) $\frac{31}{13}$ e) $\frac{5}{13}$

7. Halle el valor de:

2Cos 48° · Cos 5° – Cos 43°

a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4
d) 0,5 e) 0,6

8. Halle el valor de "K", en:

K · Tg 56° = Tg 73° – Tg 17°

a) 1/2 b) 1 c) 3/2
d) 2 e) 2/3

9. El valor de la expresión:

4Cos 7° + 3Sen 7°

es:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e) 5

10. Calcular el valor de:
$4(\text{Tg } 19°+\text{Tg } 18°)+3\text{Tg } 19° \cdot \text{Tg } 18°$
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11. Halla el valor de:
$(\text{Tg } 36°+1)(\text{Tg } 9°+1)$
a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 3/2 e) 4

12. En un triángulo ABC, se cumple:
$\text{Tg B} + \text{Tg C} = 5\text{Tg A}$
Halle:
$$N = \frac{\text{TgB} \cdot \text{TgC} + 2}{\text{TgB} \cdot \text{TgC} - 2}$$
a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 3/2 e) 4

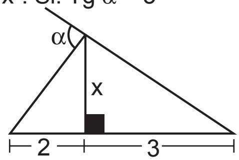
13. Si: $\text{Tg}(x+45°) = -3$
Halle: Csc x; $0° < x < 90°$
a) 3 b) 2 c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

14. Si: $\text{Tg}(3\alpha-2\beta) = \frac{1}{3}$
y $\text{Tg}(3\beta-2\alpha) = \frac{2}{3}$
Halle: $\text{Tg}(\alpha+\beta)$
a) $\frac{9}{7}$ b) $\frac{7}{9}$ c) 7 d) 9 e) 16

15. Si: $\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \beta = m$
$\text{Sen } \beta + \text{Cos } \alpha = n$
Calcular: $\text{Sen}(\alpha+\beta)$
a) m^2+n^2+2 b) m^2+n^2-2
c) $\frac{m^2+n^2+2}{2}$ d) $\frac{m^2+n^2+1}{2}$
e) $\frac{m^2+n^2-2}{2}$

16. Calcular:
$$P = \frac{\sqrt{3}\text{Cos}40° + \text{Sen}40°}{\text{Cos}20° \cdot \text{Cos}10° + \text{Sen}20° \cdot \text{Sen}10°}$$
a) 2 b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

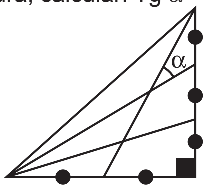
17. Hallar "x". Si: $\text{Tg } \alpha = 5$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

18. Si: $3\text{Cos}(\alpha-\beta) = 5\text{Cos}(\alpha+\beta)$
Hallar: $\text{Ctg } \alpha \cdot \text{Ctg } \beta$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. De la figura, calcular: $\text{Tg } \alpha$



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$ e) 1

20. Si:
$\text{Sen}(\alpha+2\beta) = 5\text{Sen } \alpha$
Halle:
$$\frac{\text{Tg}\beta}{\text{Tg}(\alpha+\beta)}$$
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) 3 e) 5

CLAVES II				
1. d	2. a	3. b	4. e	5. c
6. a	7. e	8. d	9. d	10. c
11. c	12. c	13. d	14. a	15. e
16. a	17. b	18. d	19. b	20. b

Identidades trigonométricas para el arco doble

Seno del arco doble

$\boxed{Sen2x = 2SenxCosx}$

Demostración

Recordar que:

$$Sen(x + y) = Senx \cdot Cosy + Cosx \cdot Seny$$

Hacemos y = x, entonces tendremos:

$$Sen(x + x) = Senx \cdot Cosx + Cosx \cdot Senx$$

$$Sen2x = 2SenxCosx \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $Sen20^\circ = Sen2(10^\circ) = 2Sen10^\circ \cdot Cos10^\circ$
- $Sen4\alpha = Sen2(2\alpha) = 2Sen2\alpha \cdot Cos2\alpha$
- $2Sen7^\circ30' \cdot Cos7^\circ30' = Sen2(7^\circ30') = Sen14^\circ60' = Sen15^\circ$
- $2 \cdot Sen\frac{\theta}{2} \cdot Cos\frac{\theta}{2} = Sen2\frac{\theta}{2} = Sen\theta$

Coseno del arco doble

$\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$

Demostración

Recordar que:

$$Cos(x + y) = Cosx \cdot Cosy - Senx \cdot Seny$$

Hacemos y = x, entonces tendremos:

$$Cos(x + x) = Cosx \cdot Cosx - Senx \cdot Senx$$

$$Cos2x = Cos^2x - Sen^2x \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $Cos8\varphi = Cos2(4\varphi) = Cos^24\varphi - Sen^24\varphi$
- $Cos50^\circ = Cos2(25^\circ) = Cos^225^\circ - Sen^225^\circ$
- $Cos^2(A + B) - Sen^2(A + B) = Cos2(A + B) = Cos(2A + 2B)$
- $Cos^2\frac{\pi}{8} - Sen^2\frac{\pi}{8} = Cos2\left(\frac{\pi}{8}\right) = Cos\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x}$

Demostración
Recordar que:

$\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1 \qquad \text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

Reemplazando en:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x \qquad \text{Cos}2x = (1 - \text{Sen}^2x) - \text{Sen}^2x$

$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$ L.q.q.d

Ejemplos

- $\text{Cos}86º = \text{Cos}2(43º) = 1 - 2\text{Sen}^2 43º$
- $\text{Cosy} = \text{Cos}2\left(\dfrac{y}{2}\right) = 1 - 2\text{Sen}^2\dfrac{y}{2}$
- $1 - 2\text{Sen}^2 1º = \text{Cos}2(1º) = \cos 2º$
- $1 - 2\text{Sen}^2(45º - \theta) = \text{Cos}2(45º - \theta) = \text{Cos}(90º - 2\theta) = \text{Sen}2\theta$

$\boxed{\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1}$

Demostración
Recordamos que:

$\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1 \qquad \text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x$

Reemplazando en:

$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x \qquad \text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$

$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$ L.q.q.d

Ejemplos

- $\text{Cos}9º = \text{Cos}2\left(\dfrac{9º}{2}\right) = \text{Cos}2(4º30') = 2\text{Cos}^2 4º30' - 1$
- $\text{Cos}6\gamma = \text{Cos}2(3\gamma) = 2\text{Cos}^2 3\gamma - 1$
- $2\text{Cos}^2 11º15' - 1 = \text{Cos}2(11º15') = \cos 22º30'$
- $2\text{Cos}^2(30º + \alpha) - 1 = \text{Cos}2(30º + \alpha) = \text{Cos}(60º + 2\alpha)$

Degradación del exponente “2” o “cuadrado”

Las fórmulas expuestas a continuación son empleadas en expresiones trigonométricas, donde se presenten “senos” o “cosenos” de ciertos arcos elevados al exponente “2”.

Degradación del “cuadrado” del seno de un arco simple “x”

Se ha demostrado que:

$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x \qquad \boxed{2\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}2x}$

Ejemplos

- $2Sen^2 18º = 1 - Cos2(18)º = 1 - Cos36º$
- $Sen^2 2\alpha = \dfrac{2Sen^2 2\alpha}{2} = \dfrac{1 - Cos2(2\alpha)}{2} = \dfrac{1 - Cos4\alpha}{2}$
- $2Sen^2(a - b) = 1 - Cos2(a - b) = 1 - Cos(2a - 2b)$
- $2Sen^2 22º30' = 1 - Cos2(22º30') = 1 - Cos44º60' = 1 - Cos45º$
- $1 - Cos8\theta = 1 - Cos2(4\theta) = 2Sen^2 4\theta$
- $1 - CosA = 1 - Cos2\left(\dfrac{A}{2}\right) = 2Sen^2 \dfrac{A}{2}$
- $1 - Cos37º = 1 - Cos2\left(\dfrac{37º}{2}\right) = 2Sen^2\left(\dfrac{37º}{2}\right) = 2Sen^2 18º30'$

Degradación del "cuadrado" del coseno de un arco simple "x"

Se ha demostrado que:

$Cos2x = 2Cos^2x - 1$ $\qquad$ $\boxed{2Cos^2x = 1 + Cos2x}$

Ejemplos

- $2Cos^2 3\varphi = 1 + Cos2(3\varphi) = 1 + Cos6\varphi$
- $Cos^2 75º = \dfrac{2Cos^2 75º}{2} = \dfrac{1 + Cos2(75º)}{2} = \dfrac{1 + Cos150º}{2}$
- $2Cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 + Cos2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 + Cos\alpha$
- $4Cos^2 10º = 2[2Cos^2 10º] = 2[1 + Cos2(10º)] = 2[1 + Cos20º] = 2 + 2Cos20º$
- $1 + Cos40º = 1 + Cos2(20º) = 2Cos^2 20º$
- $1 + Cos10b = 1 + Cos2(5b) = 2Cos^2 5b$
- $1 + Cos(x + y) = 1 + Cos2\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = 2Cos^2\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$
- $1 + Cos53º = 1 + Cos2\left(\dfrac{53º}{2}\right) = 2Cos^2\left(\dfrac{53º}{2}\right) = 2Cos^2 26º30'$

Tangente del arco doble

$$\boxed{Tan\,2x = \frac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$$

Demostración

Recordamos que:

$$Tan(x + y) = \frac{Tanx + Tany}{1 - Tanx \cdot Tanx}\text{ , hacemos } y = x$$

$$\text{Tan}(x+x)=\frac{\text{Tanx}+\text{Tanx}}{1-\text{Tanx}\bullet\text{Tanx}}$$

$$\text{Tan2x}=\frac{2\text{Tanx}}{1-\text{Tan}^2x}\qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $\text{Tan36º}=\text{Tan2(18º)}=\dfrac{2\text{Tan18º}}{1-\text{Tan}^2 18º}$
- $\dfrac{2\text{Tan8º}}{1-\text{Tan}^2 8º}=\text{Tg2(8º)}=\text{Tg16º}$
- $\text{Tan}4\theta=\text{Tan}2(2\theta)=\dfrac{2\text{Tan}2\theta}{1-\text{Tan}^2 2\theta}$
- $\dfrac{2\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\text{Tan}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{Tan}\alpha$

Cotangente, secante y cosecante del arco doble

Tomaremos las identidades recíprocas aplicadas al arco doble, es decir:

Como: $\text{Tan2x}\bullet\text{Cot2x}=1$ $\qquad$ $\text{Cot2x}=\dfrac{1}{\text{Tan2x}}$

Como: $\text{Cos2x}\bullet\text{Sec2x}=1$ $\qquad$ $\text{Sec2x}=\dfrac{1}{\text{Cos2x}}$

Como: $\text{Sen2x}\bullet\text{Csc2x}=1$ $\qquad$ $\text{Csc2x}=\dfrac{1}{\text{Sen2x}}$

Ejemplo

- Siendo: $\dfrac{\text{Sec2x}}{\text{Csc2x}}=1{,}2$; calcular el valor de “Cot 2x”.

Resolución

Sabemos: $\dfrac{\text{Sec2x}}{\text{Csc2x}}=1{,}2$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{1}{\text{Cos2x}}}{\frac{1}{\text{Sen2x}}}=\dfrac{12}{10}$

$\dfrac{\text{Sen2x}}{\text{Cos2x}}=\dfrac{6}{5}$ $\qquad$ $\text{Tan2x}=\dfrac{6}{5}$

Luego: $\text{Cot2x}=\dfrac{1}{\text{Tan2x}}$ $\qquad$ $\text{Cot2x}=\dfrac{1}{\frac{6}{5}}=\dfrac{5}{6}$

Especiales del arco doble

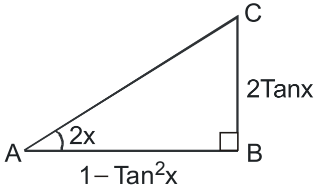
$$\boxed{Sen2x = \frac{2Tanx}{1+Tan^2x}} \quad y \quad \boxed{Cos2x = \frac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}}$$

Como Tangente del Arco Simple "x"

Recordemos que:

$$Tan\ 2x = \frac{2Tanx}{1-Tan^2x}$$

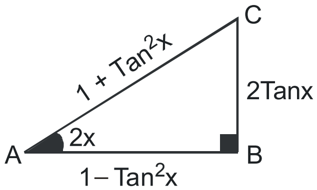
y suponiendo "2x" ángulo agudo, formamos el siguiente triángulo rectángulo ABC:



Calculamos luego la hipotenusa con aplicación del Teorema de Pitágoras, es decir:

$$\overline{AC}^2 = (2Tanx)^2 + (1 - Tan^2x)^2$$

$$\overline{AC} = 1 + Tan^2x$$



Del $\triangle$ABC mostrado tenemos:

$$Sen2x = \frac{2Tanx}{1+Tan^2x} \quad y$$

$$Cos2x = \frac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}$$

Ejemplos

- $\dfrac{2Tan7^o30'}{1+Tan^2 7^o30'} = Sen2(7^o30') = Sen15^o$
- $\dfrac{1-Tan^2 4\theta}{1+Tan^2 4\theta} = Cos2(4\theta) = Cos\ 8\theta^o$

Ejemplos

Si: Tanx = 3; hallar el valor de:

$$P = Sen\ 2x - Cos\ 2x$$

Resolución

* $Sen2x = \dfrac{2Tanx}{1+Tan^2x} = \dfrac{2(3)}{1+(3)^2} = \dfrac{6}{10}$ $\qquad$ $Sen2x = \dfrac{3}{5}$

* $Cos2x = \dfrac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x} = \dfrac{1-(3)^2}{1+(3)^2} = \dfrac{-8}{10}$ $\qquad$ $Cos2x = \dfrac{-4}{5}$

Finalmente:

$$P = Sen2x - Cos2x = \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \qquad P = \frac{7}{5}$$

$$\boxed{Cotx + Tanx = 2Csc2x} \quad y \quad \boxed{Cot\,x - Tanx = 2Cot2x}$$

Demostraremos que:

Cotx – Tanx = 2Csc2x, se efectuara de izquierda a dererecha

$$Cotx - Tanx = \frac{Cosx}{Senx} - \frac{Senx}{Cosx} = \frac{Cos^2x - Sen^2x}{Senx \bullet Cosx}$$

$$= \frac{2(Cos^2x - Sen^2x)}{(2Senx \bullet Cosx)} = \frac{2Cos2x}{Sen2x}$$

Cotx – Tanx = 2Cot 2x L.q.q.d.

Análogamente se demuestra que:

Cotx + Tanx = 2Csc2x

Ejemplos

- Cot10º + Tan10º = 2Csc2(10º) = 2Csc20º
- Cot4α – Tan4α = 2Cot2(4α) = 2Cot8α
- 2Csc4θ = 2Csc2(2θ) = Cot2θ + Tan2θ
- 2Cot70º = 2Csc2(35º) = Cot35º – Tan35º

Problema Aplicativo

- Si: Cos2x = n; hallar : $W = Cot^2x - Tan^2x$

Resolución

* $W = Cot^2x - Tan^2x = (Cotx + Tanx) \bullet (Cotx - Tanx)$

$$= (2Csc2x) \bullet (2Cot2x) = \left(2 \bullet \frac{1}{Sen2x}\right) \bullet \left(2 \bullet \frac{Cos2x}{Sen2x}\right)$$

$$= \frac{4Cos2x}{Sen^2 2x} = \frac{4Cos2x}{1 - Cos^2 2x}, \quad \text{Pero}: \ Cos2x = n$$

$$W = \frac{4n}{1 - n^2}$$

Resúmen de fórmulas

BÁSICAS:

* $\boxed{Sen2x = 2Senx \cdot Cosx}$

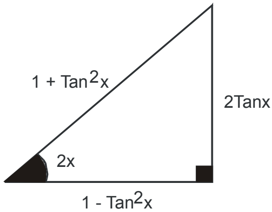
* $\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$ → $\boxed{Cos2x = 1 - 2Sen^2x}$; $\boxed{Cos2x = 2Cos^2x - 1}$

Degradan “cuadrados”:

$\boxed{2Sen^2x = 1 - Cos2x}$

$\boxed{2Cos^2x = 1 + Cos2x}$

* $\boxed{Tan2x = \dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}}$



* $\boxed{Sen2x = \dfrac{2Tanx}{1 + Tan^2x}}$

* $\boxed{Cos2x = \dfrac{1 - Tan^2x}{1 + Tan^2x}}$

Observaciones:

* $Cot\,2x = \dfrac{1}{Tan2x}$

* $Sec2x = \dfrac{1}{Cos2x}$

* $Csc2x = \dfrac{1}{Sen2x}$

Especiales:

* $Cotx + Tanx = 2Csc2x$

* $Cotx - Tanx = 2Cot2x$

* $Sec2x + 1 = \dfrac{Tan2x}{Tanx}$

* $Sec2x - 1 = Tan2x \cdot Tanx$

* $Sen^4x + Cos^4x = \dfrac{3 + Cos4x}{4}$

* $Sen^6x + Cos^6x = \dfrac{5 + 3Cos4x}{8}$

Problemas I

1 Si: $\text{Cos } x = \dfrac{2}{3}$; 0°< x < 90°
Calcule: Sen 2x

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ e) $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

2. Si: $\text{Sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
Calcular:
Cos 4x; 0° < x < 90°

a) $\dfrac{5}{9}$ b) $-\dfrac{5}{9}$ c) $\dfrac{31}{81}$

d) $-\dfrac{31}{81}$ e) $\dfrac{25}{81}$

3. Si: $\text{Sen } x - \text{Cos } x = \dfrac{1}{3}$
Halle: Sen 2x

a) $\dfrac{1}{9}$ b) $\dfrac{2}{9}$ c) $\dfrac{4}{9}$

d) $\dfrac{8}{9}$ e) 1

4. Halle el valor de:

$$\frac{2\text{Tg}x}{1-\text{Tg}^2x}\text{ ; para: } x = 4°$$

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{7}$

d) 7 e) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

5. Reducir la expresión:

$$E = \frac{\text{Sen}2x \cdot \text{Cos}x}{\text{Csc}x - \text{Sen}x}$$

a) 2Sen x b) 2Cos x c) 1–Cos 2x
d) 1+Cos 2x e) 2Tg x

6. Simplifique:

$$\left(\frac{\text{Sen}2\theta}{\text{Sen}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sen}2\theta}{\text{Cos}\theta}\right)^2$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7. Calcule el valor de:
$\text{Cos}^4 8° - \text{Sen}^4 8°$

a) $\dfrac{1}{7}$ b) 7 c) $\dfrac{24}{25}$

d) $\dfrac{7}{24}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

8. Reducir:

$$F = \frac{\text{Sec}x \cdot \text{Cos}2x}{\text{Cos}x - \text{Sen}x} - 1$$

a) Cos x b) Tg x c) Cot x
d) Sec x e) Csc x

9. Simplificar:

$$\frac{\text{Cos}\,2x + \text{Cos}x + 1}{\text{Sen}2x + \text{Sen}x}$$

a) Sen x b) Cos x c) Tg x
d) Cot x e) Sec x

10. Reducir:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+2\text{Cos}80°}}$$

a) 2Sen 10° b) 2Cos 10°
c) 2Cos 20° d) 2Sen 20°
e) 2Sen 40°

11. Halle el valor de:
(Cot 42° + Tg 42°) Cos 6°

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$
d) 2 e) 3

12. Reducir:

$$A = \frac{(\text{Sen}\alpha + \text{Cos}\alpha)^2 - 1}{\text{Sen}4\alpha}$$

a) $\dfrac{1}{2}$ Sec 2α b) Sec 2α

c) $\dfrac{1}{2}$ Csc 2α d) Csc 2α

e) $\dfrac{1}{2}$ Cos 2α

13. Si: Tg x = 3.
Halle el valor de la expresión:
Sen(2x–y)·Cos y + Sen y·Cos(2x-y)

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{4}{5}$ e) 1

14. Reducir:
Sen θ·Cos θ·Cos 2θ·Cos 4θ·Cos 8θ

a) $\frac{1}{16}$ Sen 16θ b) $\frac{1}{32}$ Sen 16θ
c) $\frac{1}{16}$ Sen 32θ d) $\frac{1}{32}$ Sen 16θ
e) $\frac{1}{32}$ Sen 32θ

15. Calcular: Sen 2x
Si: 14Tg x = 5 + 5Tg²x

a) $\frac{5}{14}$ b) $\frac{14}{5}$ c) $\frac{7}{5}$
d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{19}{5}$

16. Si: α+β = 90°.
Reducir la expresión:
A= (Cos α + Cos β)(Cos α – Cos β)
a) Sen 2α b) Cos 3β c) Cos 2α
d) Sen 2β e) 1

17. Si: Tg α = 2; hallar: Tg(2α+45°)

a) $-\frac{1}{7}$ b) –7 c) 7
d) $\frac{1}{7}$ e) 5

18. Dado:
$(\cos^6 x \operatorname{Sen}^2 x - \operatorname{Sen}^6 x \cos^2 x)\cdot \cos 2x = m$
Calcular: Cos 8x
a) m b) 1 – m c) 1 – 4m
d) 1–16m e) 1–32m

19. Si: Tg x + Cot x = a
Hallar: Sec 4x

a) a² b) $\frac{a^2}{2}$ c) $\frac{a^2}{a^2-8}$
d) $\frac{a^2+8}{a}$ e) $\frac{a+8}{a}$

20. Reducir:
(Sec x+1)(Sec 2x+1)(Sec 4x+1)(Sec 8x+1)

a) $\operatorname{Tg}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Tg} 8x$ b) $\operatorname{Cot}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Tg} 8x$
c) $\operatorname{Tg}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Tg} 16x$ d) $\operatorname{Cot}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Cot} 16x$
e) $\operatorname{Tg}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Cot} 16x$

CLAVES I				
1. e	2. d	3. d	4. c	5. c
6. d	7. c	8. b	9. d	10. d
11. d	12. a	13. c	14. a	15. d
16. c	17. a	18. e	19. c	20. b

Problemas II

1. Simplificar:
$$P=\sqrt{\frac{\cos^2 x-\cos 2x}{2\operatorname{Sen}2x\cdot \operatorname{Cotx}}}\ ;\ 0° < x < 90°$$
a) $\frac{1}{2}$ b) $\operatorname{Tan}\frac{x}{2}$ c) $\frac{\operatorname{Tanx}}{2}$
d) $\operatorname{Cot}\frac{x}{2}$ e) $\frac{\operatorname{Cotx}}{2}$

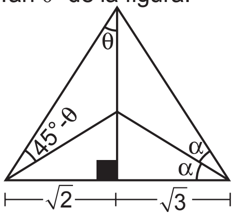
2. Hallar “A·B”, siendo:
A = 2Cos x (Cos x – Sen x) – 1
B = 1 – 2Sen x (Sen x – Cos x)
a) 1 b) –1 c) –Cos 4x
d) Cos 4x e) Sen 2x · Cos 2x

3. Calcular:
$M = 4\operatorname{Sen} 9°\cdot \cos 9°\cdot \cos 18° + \operatorname{Sen}^2 27° - \cos^2 27°$
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

4. Siendo:
$\operatorname{Sen}^2 x - \cos^2 y = m$
Hallar:
Q = Cos 2x + Cos 2y
a) 2m b) –2m c) 2m+2
d) 2m–2 e) 2–2m

5. Indicar el equivalente de:
$$W=\frac{1+\cos 20°-\operatorname{Sen}20°}{1-\cos 20°-\operatorname{Sen}20°}$$
a) –Cot 10° b) Cot 10° c) –Tan 10°
d) Tan 10° e) –1

6. Hallar "Tan θ" de la figura:



a) $\frac{1}{2}$ b) 5 c) $\frac{1}{5}$
d) 6 e) $\frac{1}{6}$

7. Calcular:

$$P=\left[\frac{2Tan75°}{1+Tan^2 75°}\right]\cdot\left[\frac{1-Tan^2 67°30'}{1+Tan^2 67°30'}\right]$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Reducir:

$$Z = 4Cot\ 2x + 3Tan\ x - 2Csc\ 2x$$

a) Cot x b) –Cot x c) 3Cot x
d) -3Cot x e) 0

9. Calcular "Csc 2x", si:

$$Sen(\pi Senx)\cdot Sec(\pi Cos\ x) = 1$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{4}$
d) $-\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

10. Calcular:

$$W = 8Sen\frac{\pi}{16}\cdot Cos^3\frac{\pi}{16} - 8Sen^3\frac{\pi}{16}\cdot Cos\frac{\pi}{16}$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $2\sqrt{2}$

11. Simplificar:

$$E=\frac{1-3Sen^2x+2Sen^4x}{2Cos^4x-3Cos^2x+1}$$

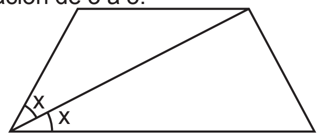
a) 1 b) Cot²x c) –Cot²x
d) Tan²x e) –Tan²x

12. Reducir: (0° < x < 90°)

$$M=\frac{\sqrt{2(1+Cosx)}+\sqrt{2(1-Cosx)}}{\sqrt{1+Senx}}$$

a) 1 b) 2 c) 1/2
d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. Hallar "Cot x" del trapecio isósceles mostrado, si las bases están en la relación de 3 a 5.



a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

14. Si: $Tan^2\theta + Cot^2\theta = 7$ y $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
luego el valor de "Csc 2θ" será:

a) 3 b) –3 c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$

15. Reducir:

$$M=Tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-Tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

a) 0 b) –2Cot α c) 2Cot α
d) –2Tan α e) 2Tan α

16. Indicar el equivalente de:

$$A=\frac{(Senx+Cosx+1)(Senx+Cosx-1)}{Cos^4x-Sen^4x}$$

a) –Cot 2x b) –Tan 2x c) Tan 2x
d) Cot 2x e) 1

17. Si: 3Sen x = $\sqrt{3}$; Hallar: Cos 4x

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{7}{9}$ e) $-\frac{7}{9}$

18. Reducir:

$$A = Cos\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}Cos\frac{x}{2} + Sen\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$$

a) Sen(30°+x)
b) 2Cos(30°-x)
c) 2Cos(30°+x)
d) Cos(30°–x)
e) Cos(30°+x)

19. Si: Cos 4x = 0,333…; hallar:
$M=(Sen^3 2x+Cos^3 2x)^2+(Sen^3 2x-Cos^3 2x)^2$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

20. La expresión equivalente a:

$$Tan\left(\frac{\pi + 2x}{4}\right) \text{ es:}$$

a) Sec x + Tan x
b) Sec x – Tan x
c) Csc x + Cot x
d) Csc x – Cot x
e) Sec x + Cot x

CLAVES II				
1. c	2. d	3. e	4. b	5. a
6. e	7. b	8. a	9. d	10. c
11. c	12. b	13. a	14. e	15. d
16. c	17. e	18. d	19. b	20. a