Identidades trigonométricas para el arco mitad

Seno del arco mitad

$$\boxed{\text{Sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{2}}}$$

Demostración

Recordar que:

$$\text{Cos2y} = 1-2\text{Sen}^2\text{y} \rightarrow 2\text{Sen}^2\text{y} = 1-\text{Cos2y} \rightarrow \text{Sen}^2\text{y} = \frac{1-\text{Cos2y}}{2}$$

$$\rightarrow \text{Seny} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos2y}}{2}} \rightarrow \text{hacemos: } y = \frac{x}{2} \rightarrow 2y = x, \text{ tendremos:}$$

$$\rightarrow \text{Sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{2}} \text{ L.q.q.d}$$

Observación general

La elección del signo "+" ó "–" en las fórmulas expuestas que presentan radicales, dependerá del cuadrante al cual pertenece el arco "X/2", así como del operador trigonométrico que lo afecta.

Ejemplos

$$\text{Sen}50^\circ = \text{Sen}\left(\frac{100^\circ}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\text{Cos}100^\circ}{2}}$$

IC

$$\text{Sen}200^\circ = \text{Sen}\left(\frac{400^\circ}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\text{Cos}400^\circ}{2}}$$

IIIC

Coseno de arco mitad

$$\boxed{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}}$$

Demostración

Recordar que:

$\operatorname{Cos}2y = 2\operatorname{Cos}^2 y - 1 \quad \rightarrow \quad 2\operatorname{Cos}^2 y = 1 + \operatorname{Cos}2y$

$\rightarrow \quad \operatorname{Cos}^2 y = \dfrac{1+\operatorname{Cos}2y}{2}$

$\rightarrow \quad \operatorname{Cos}y = \pm\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{Cos}2y}{2}}$

$\rightarrow$ hacemos: $y = \dfrac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2y = x$, tendremos:

$\rightarrow \quad \operatorname{Cos}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}$ L.q.q.d

Ejemplos

$$\operatorname{Cos}100^\circ = \operatorname{Cos}\left(\frac{200^\circ}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}200^\circ}{2}}$$

IIC

$$\operatorname{Cos}300^\circ = \operatorname{Cos}\left(\frac{600^\circ}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}600^\circ}{2}}$$

IV

Tangente del arco mitad

$$\boxed{\operatorname{Tan}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x}}}$$

Demostración

Observar que:

$$\operatorname{Tan}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{Sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{2}}{\frac{1+\operatorname{Cos}x}{2}}}$$

$\rightarrow \quad \operatorname{Tan}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x}}$ L.q.q.d

Ejemplos

$$Tan50^\circ = Tan\left(\frac{100^\circ}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-Cos100^\circ}{1+Cos100^\circ}}$$

IC

$$Tan300^\circ = Tan\left(\frac{600^\circ}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-Cos600^\circ}{1+Cos600^\circ}}$$

IVC

$$\boxed{Tan\frac{x}{2} = Cscx - Cotx}$$

Demostración

Notemos que también:

$$Tan\frac{x}{2} = \frac{Sen\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}} = \frac{Sen\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}} \bullet \frac{2Sen\frac{x}{2}}{2Sen\frac{x}{2}} = \frac{2Sen^2\frac{x}{2}}{2Sen\frac{x}{2} \bullet Cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1-Cos2\left(\frac{x}{2}\right)}{Sen2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-Cosx}{Senx} = \frac{1}{Senx} - \frac{Cosx}{Senx}$$

$$\rightarrow \quad Tan\frac{x}{2} = Cscx - Cotx \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$Tan50^\circ = Tan\left(\frac{100^\circ}{2}\right) = Csc100^\circ - Cot100^\circ$$

$$Tan300^\circ = Tan\left(\frac{600^\circ}{2}\right) = Csc600^\circ - Cot600^\circ$$

Cotangente del arco mitad

$$\boxed{Cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{1-Cosx}}}$$

Demostración

Observar que:

$$\mathrm{Cot}\frac{x}{2}=\frac{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}{\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}x}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}x}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1+\mathrm{Cos}x}{2}}{\frac{1-\mathrm{Cos}x}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Cot}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}x}{1-\mathrm{Cos}x}} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$\mathrm{Cot}100^{\circ}=\mathrm{Cot}\left(\frac{200^{\circ}}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}200^{\circ}}{1-\mathrm{Cos}200^{\circ}}}$$

IIC

$$\mathrm{Cot}200^{\circ}=\mathrm{Cot}\left(\frac{400^{\circ}}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}400^{\circ}}{1-\mathrm{Cos}400^{\circ}}}$$

IIIC

$$\boxed{\mathrm{Cot}\frac{x}{2}=\mathrm{Csc}x+\mathrm{Cot}x}$$

Demostración

Notemos que también:

$$\mathrm{Cot}\frac{x}{2}=\frac{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}{\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}=\frac{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}{\mathrm{Sen}\frac{x}{2}}\bullet\frac{2\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}{2\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}=\frac{2\mathrm{Cos}^2\frac{x}{2}}{2\mathrm{Sen}\frac{x}{2}\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1+\mathrm{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sen}x}=\frac{1}{\mathrm{Sen}x}+\frac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sen}x}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Cot}\frac{x}{2}=\mathrm{Csc}x+\mathrm{Cot}x \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

$$\mathrm{Cot}100^{\circ}=\mathrm{Cot}\left(\frac{200^{\circ}}{2}\right)=\mathrm{Csc}200^{\circ}+\mathrm{Cot}200^{\circ}$$

$$\mathrm{Cot}200^{\circ}=\mathrm{Cot}\left(\frac{400^{\circ}}{2}\right)=\mathrm{Csc}400^{\circ}+\mathrm{Cot}400^{\circ}$$

Secante del arco mitad

$$\boxed{\text{Sec}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1+\text{Cosx}}}}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\text{Cos}\frac{x}{2} \bullet \text{Sec}\frac{x}{2} = 1$$

$$\rightarrow \quad \text{Sec}\frac{x}{2} = \frac{1}{\text{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cosx}}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad \text{Sec}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1+\text{Cosx}}} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Cosecante del arco mitad

$$\boxed{\text{Csc}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1-\text{Cosx}}}}$$

Demostración

Sabemos que:

$$\text{Sen}\frac{x}{2} \bullet \text{Csc}\frac{x}{2} = 1$$

$$\rightarrow \quad \text{Csc}\frac{x}{2} = \frac{1}{\text{Sen}\frac{x}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cosx}}{2}}}$$

$$\rightarrow \quad \text{Csc}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{1-\text{Cosx}}} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

Si: Cosx = 0,6 $\rightarrow$ 270º< x <360º

Calcular los valores de " $\text{Csc}\frac{x}{2}$ " y " $\text{Sec}\frac{x}{2}$ "

Resolución

* Cosx = 0,6 $\rightarrow$ $\text{Cosx} = \frac{6}{10}$ $\rightarrow$ $\text{Cos x} = \frac{3}{5}$

* 270º < x < 360º $\rightarrow$ $135º < \frac{x}{2} < 180º$ $\rightarrow$ " $\frac{x}{2}$ " $\rightarrow$ IIC

Entonces tenemos:

i) $\text{Csc}\dfrac{x}{2} \underset{\text{IIC}}{=} +\sqrt{\dfrac{2}{1-\text{Cosx}}} = \sqrt{\dfrac{2}{1-\dfrac{3}{5}}} \quad \rightarrow \quad \text{Csc}\dfrac{x}{2} = \sqrt{5}$

ii) $\text{Sec}\dfrac{x}{2} \underset{\text{IIC}}{=} -\sqrt{\dfrac{2}{1+\text{Cosx}}} = -\sqrt{\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{5}}} \quad \rightarrow \quad \text{Sec}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Resumen de fórmulas

Básicas

* $\boxed{\text{Sen}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{Cosx}}{2}}}$

* $\boxed{\text{Cos}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\text{Cosx}}{2}}}$

* $\boxed{\text{Tan}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{Cosx}}{1+\text{Cosx}}} = \dfrac{1-\text{Cosx}}{\text{Senx}} = \text{Cscx} - \text{Cotx}}$

* $\boxed{\text{Cot}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\text{Cosx}}{1-\text{Cosx}}} = \dfrac{1+\text{Cosx}}{\text{Senx}} = \text{Cscx} + \text{Cotx} = \dfrac{1}{\text{Tan}\dfrac{x}{2}}}$

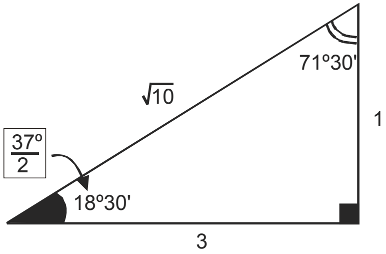
Observaciones

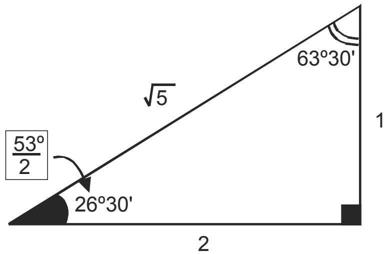
* $\boxed{\text{Sec}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\text{Cos}\dfrac{x}{2}}} \rightarrow \boxed{\text{Sec}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{1+\text{Cosx}}}}$

* $\boxed{\text{Csc}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\text{Sen}\dfrac{x}{2}}} \rightarrow \boxed{\text{Csc}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{1-\text{Cosx}}}}$

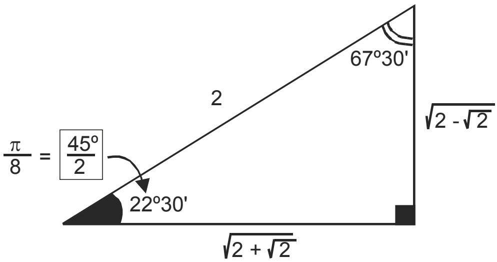
Notas

* △s Notables Aproximados:





* △s Notable Exacto:



Problemas I

1. Si:

$$Cos^2\theta = \frac{4}{9}\ ;\ \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$$

Calcular:

$$Sen^2\frac{\theta}{2}$$

a) $\frac{25}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{30}}{6}$

2. Si:

$$Sec\,x = 8\ ;\ 270° < x < 360°$$

Calcular:

$$2Cos\frac{x}{2}$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{4}$ e) $-\frac{3}{2}$

3. Si:

$$\frac{Tan\,x}{2} = \frac{6}{5}\ ;\ 0°< x < 90°$$

Hallar:

$$Tan\frac{x}{2}$$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 1

d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{6}{5}$

4. Si:

$$Sen\,x = \frac{24}{25}\ ;\ 450° < x < 540°$$

Calcular:

$$Csc\frac{x}{2}$$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{5}{4}$

d) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{25}{48}$

5. Calcular:

$$4\cdot Cos\frac{\pi}{8}$$

a) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ b) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ d) $2\sqrt{2\sqrt{2}}$

e) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

6. Determinar el valor de:

$$2Sen\frac{\pi}{16}$$

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

7. Calcular:

$$Tan\ 37°30'$$

a) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

c) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$

d) $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

e) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$

8. Hallar el valor aproximado de:

$$W = \frac{Csc18°30'}{Sec26°30'}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{20}$

9. Si: A = 555°

Hallar:

$$Cot\left(\frac{3A}{2}\right)$$

a) $\sqrt{2}-1$ b) $1-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+1$

d) $-1-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

10. Reducir:

$$M=\sqrt{\frac{1+\cos 20^\circ}{2}}-2\cos 40^\circ\sqrt{\frac{1-\cos 80^\circ}{2}}$$

a) 0 b) Cos 10° c) Sen 10°
d) 2Cos 10° e) 2 Sen 10°

11. Si:

$$\sqrt{\frac{1+\text{Sen}200^\circ}{1-\text{Sen}200^\circ}}=\frac{\text{Csc}x}{\text{Sec}x}$$

Hallar la medida del ángulo agudo "x".
a) 20° b) 35° c) 40°
d) 55° e) 70°

12. Reducir:

$$W = \text{Cot } 4\theta + \text{Csc } 4\theta - \text{Csc } 2\theta$$

a) Tan θ b) –Tan θ c) Cot θ
d) –Cot θ e) 0

13. Indicar el equivalente de:

$$H=\frac{\text{Tan}x-\text{Sen}2\pi}{\text{Sec}x+\text{Cos}\pi}$$

a) $\frac{\text{Cot}x}{2}$ b) $-\text{Tan}\frac{x}{2}$ c) $-\text{Cot}\frac{x}{2}$
d) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ e) $\text{Cot}\frac{x}{2}$

14. Indicar el equivalente de:

$$P=\frac{2\text{Sen}\frac{x}{2}\cdot\text{Cos}\frac{x}{2}}{1+\text{Cos}^2\frac{x}{2}-\text{Sen}^2\frac{x}{2}}$$

a) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ b) $\text{Cot}\frac{x}{2}$ c) $-\text{Tan}\frac{x}{2}$
d) $\text{Cot}\frac{x}{2}$ e) $\frac{\text{Tan}x}{2}$

15. En la siguiente igualdad:

$$\text{Cos}12^\circ30' = \sqrt{\frac{1+\text{Sen}\phi}{2}}$$

Hallar la medida del ángulo agudo "ϕ'.
a) 12°30' b) 77°30' c) 50°
d) 25° e) 65°

16. Indicar el equivalente de:

$$M=\frac{1-\text{Cos}x+\text{Sen}x}{1+\text{Cos}x+\text{Sen}x}$$

a) 1 b) $\text{Sen}\frac{x}{2}$ c) $\text{Cos}\frac{x}{2}$
d) $\text{Tan}\frac{x}{2}$ e) $\text{Cot}\frac{x}{2}$

17. Si:
$\text{Cos}\frac{A}{2}\cdot\text{Cos A}+\text{Sen}\frac{A}{2}\cdot\text{Sen A}=\frac{1}{3}$
Calcular el valor de:

$$\text{Tan}\frac{A}{4}$$

a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\pm\sqrt{2}$ c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\pm\frac{1}{2}$

18. Si: Csc x + Cot x = 0,666...
Calcular:

$$\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

a) $-\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) –5
d) 5 e) $-\frac{1}{2}$

19. Si: $\text{Cot}\frac{x}{2}=\sqrt{5}$; 0° < x < 90°
Hallar:
Q = 3 Sen x – 2Tan x
a) 0 b) $5\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ e) $\sqrt{5}$

20. Si: 90° < x < 180° y

$$\text{Cot}^2\frac{x}{2}+\text{Tan}^2\frac{x}{2}=27$$

Calcular: Tan 2x
a) $\frac{20}{21}$ b) $-\frac{20}{21}$ c) $\frac{21}{20}$
d) $-\frac{21}{20}$ e) $-\frac{4}{5}$

CLAVES I				
1. c	2. e	3. a	4. c	5. e
6. c	7. e	8. d	9. b	10. a
11. d	12. b	13. e	14. a	15. e
16. d	17. a	18. a	19. a	20. b

Problemas II

1. Si:
   $\text{Cos }\alpha = \dfrac{2}{3}$; $0° < \alpha < 90°$

   Halle: $\text{Sen}\dfrac{\alpha}{2}$

   a) $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

   d) $\sqrt{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$

2. Si:
   $\text{Cos }\theta = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

   Calcule: $\text{Cos}\dfrac{\theta}{2}$

   a) $-\dfrac{9}{16}$ b) $\dfrac{9}{16}$ c) $-\dfrac{3}{4}$

   d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{1}{16}$

3. Si:
   $25\text{Cos}^2x-4 = 0$; $180° < x < 270°$

   Calcule: $\text{Tan}\dfrac{x}{2}$

   a) $-\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

   d) $-\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ e) $-\sqrt{10}$

4. Calcule “x”, si:

$$\sqrt{\frac{1-\text{Cos}10°}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\text{Cos}20°}{2}} = \frac{\text{Sen}20°}{x\cdot\text{Cos}5°}$$

   a) 8 b) 4 c) 2

   d) 1 e) $\dfrac{1}{2}$

5. Reduce:

$$E = \frac{\text{Cot}\frac{x}{2}-2\text{Cotx}}{\text{Tg}\frac{x}{2}+\text{Cotx}}$$

   a) $2\text{Sen}\dfrac{x}{2}$ b) $2\text{Cos}\dfrac{x}{2}$ c) $2\text{Tg}\dfrac{x}{2}$

   d) $2\text{Sen}^2\dfrac{x}{2}$ e) $2\text{Cos}^2\dfrac{x}{2}$

6. Calcule:

$$P = 5\sqrt{2}\cdot\text{Sen}26°30'\cdot\text{Cos }18°30'$$

   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 4 e) 5

7. Si:
   Sec 10° + Tan 10° = k
   Calcule: Cot 50°
   a) k b) 2k c) k^{-1}

   d) $2k^{-1}$ e) $\sqrt{k}$

8. Reduce:

$$M = \frac{\text{Csc}6°-\text{Cot}6°}{\text{Tan}3°}-\frac{\text{Sen}40°}{\text{Csc}40°+\text{Cot}40°}$$

   a) 1 b) Sen 40° c) Sen 50°
   d) Cos 80° e) Sen 80°

9. Halle:

$$Q = \frac{\text{Tg}\frac{\pi}{8}-2\text{Sen}\frac{\pi}{4}}{\text{Ctg}\frac{\pi}{12}-2\text{Cos}\frac{\pi}{6}}$$

   a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) –1

   d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 2

10. Si se cumple:

$$\sqrt{\frac{1-\text{Sen}50°}{1+\text{Sen}50°}} = \text{Cot x}; \ (x \rightarrow \text{agudo})$$

   Halle: Sec(x–10°)

   a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 3

   d) 4 e) $\dfrac{5}{4}$

11. Simplificar:

$$R = Csc\frac{\theta}{4} - Csc\frac{\theta}{2} - Csc\,\theta - Ctg\,\theta$$

a) 0 b) $Ctg\frac{\theta}{4}$ c) $Ctg\frac{\theta}{8}$

d) $Tg\frac{\theta}{4}$ e) $Tg\frac{\theta}{8}$

12. Reducir:

$$R = \frac{Tan10° + Cot20°}{Cot10° - Cot20°}$$

a) 1 b) 2 c) –1

d) –2 e) $\frac{1}{2}$

13. Simplifique: (0°< x < 90°)

$$E = Cos\frac{x}{2}\sqrt{1+Cosx} - Sen\frac{x}{2}\sqrt{1-Cosx}$$

a) $\sqrt{2}$ Cos x b) 2Cos x

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Cos x d) Cos x

e) 0

14. Reduce la expresión:

$$E = Tg^2\frac{x}{2} + \frac{Senx + Cosx - 1}{1 + Cosx} + Ctgx$$

a) Sen x b) Cos x c) Tg x

d) Sec x e) Csc x

15. Reduce: (90° < x < 180°)

$$E = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}}{2}}}{2}}$$

a) $\frac{Cosx}{8}$ b) $\frac{Senx}{8}$ c) $Cos\frac{x}{8}$

d) $Sen\frac{x}{8}$ e) $Sen\frac{x}{4}$

16. Reduce:

$$M = \frac{(1+Cos2x)(Csc\,2x - Cot2x)}{Sen2x(1+Cosx)\left(1+Tg^2\frac{x}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{4}$ e) 2

17. Reduce:

E = Csc x+Csc 2x+Csc 4x+Csc 8x

a) Cot 6x b) Cot 4x

c) Cot 2x d) $Cot\frac{x}{2}$ –Cot x

e) $Cot\frac{x}{2}$ –Cot 8x

18. Dada la siguiente identidad:

$(1+Sen\,x+Cos\,x)^2$

$+(1-Sen\,x+Cos\,x)^2 = WCot\frac{x}{2}$

Calcule: W

a) 2Sen x b) 3Sen x c) 4Sen x

d) Cos x e) 2Cos x

19. Si:

$Sen\,x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$; a>b>0; x∈[90°;180°]

Calcule: $Tg\frac{x}{2}$

a) $-\frac{a}{b}$ b) $-\frac{b}{a}$ c) ab

d) $\frac{a}{b}$ e) $\frac{b}{a}$

20. Simplifique:

$$E = \frac{Ctg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + Tgx}{Secx - Tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

a) 1 b) –1 c) Csc x

d) –Csc x e) Sen x

CLAVES II				
1. b	2. c	3. c	4. b	5. d
6. c	7. c	8. c	9. d	10. a
11. e	12. a	13. a	14. e	15. d
16. c	17. e	18. c	19. d	20. c

Identidades trigonométricas para el arco triple

Seno del arco triple

$$\boxed{Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x}$$

Demostración

Notamos que:

$$\begin{aligned} Sen3x &= Sen\,(2x + x) \\ &= Sen2x \cdot Cosx + Cos2x \cdot Senx \\ &= (2Senx \cdot Cosx) \cdot Cosx + Senx \cdot Cos2x \\ &= 2Senx \cdot Cos^2x + Senx \cdot (1 - 2Sen^2x) \\ &= 2Senx \cdot (1 - Sen^2x) + Senx - 2Sen^3x \\ &= 2Senx - 2Sen^3x + Senx - 2Sen^3x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad Sen3x = 3Senx - 4Sen^3x \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $Sen6\alpha = Sen3(2\alpha) = 3Sen2\alpha - 4Sen^3 2\alpha$
- $Sen27^{o} = Sen3(9^{o}) = 3Sen9^{o} - 4Sen^3 9^{o}$
- $3Sen40^{o} - 4Sen^3 40^{o} = Sen3(40^{o}) = Sen120^{o}$
- $3Sen\dfrac{\theta}{3} - 4Sen^3\dfrac{\theta}{3} = Sen3\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = Sen\theta$

Coseno del arco triple

$$\boxed{Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx}$$

Demostración

Notamos que:

$$\begin{aligned} Cos3x &= Cos(2x + x) \\ &= Cos2x \cdot Cos\,x - Sen2x \cdot Senx \\ &= Cosx \cdot Cos2x - (2Senx \cdot Cosx) \cdot Senx \\ &= Cosx \cdot (2Cos^2x - 1) - 2\,Cosx \cdot Sen^2x \\ &= 2Cos^3x - Cosx - 2Cosx(1 - Cos^2x) \\ &= 2Cos^3x - Cosx - 2Cosx + 2Cos^3x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $Cos33º = Cos3(11º) = 4Cos^3 11º – 3Cos11º$
- $Cos9\beta = Cos3(3\beta) = 4Cos^3 3\beta – 3Cos3\beta$
- $4Cos^3(60º+\varphi)–3Cos(60º+\varphi) = Cos3(60º+\varphi) = Cos(180º+3\varphi) = –Cos3\varphi$
- $4Cos^3 8º20' – 3Cos8º20' = Cos3(8º20') = Cos24º60' = Cos25º$

Degradación del exponente "3" ó "Cubo"

Las fórmulas expuestas a continuación son empleadas en las expresiones trigonométricas, donde se presenten "senos" o "cosenos" de un cierto arco elevado al exponente "3".

Degradación del "Cubo" del seno de un arco simple "x"

Se ha demostado que:

$Sen3x = 3Senx – 4Sen^3x \quad \rightarrow \quad \boxed{4Sen^3x = 3Senx – Sen3x}$

Ejemplos

- $4Sen^3 5º = 3Sen5º – Sen3(5º) = 3Sen5º – Sen15º$
- $4Sen^3 3\alpha = 3Sen3\alpha – Sen3(3\alpha) = 3Sen3\alpha – Sen9\alpha$
- $Sen^3 15º = \dfrac{4Sen^3 15º}{4} = \dfrac{3Sen15º – Sen3(15º)}{4} = \dfrac{3Sen15º – Sen45º}{4}$
- $3Sen2\theta – Sen6\theta = 3Sen2\theta – Sen3(2\theta) = 4Sen^3 2\theta$

Degradación del "Cubo" del coseno de un arco simple "x"

Se ha demostrado que:

$Cos3x = 4Cos^3x – 3Cosx \quad \rightarrow \quad \boxed{4Cos^3x = 3Cosx + Cos3x}$

Ejemplos

- $4Cos^3 5\varphi = 3Cos5\varphi + Cos3(5\varphi) = 3Cos5\varphi + Cos15\varphi$
- $4Cos^3 12º = 3Cos12º + Cos3(12º) = 3Cos12º + Cos36º$
- $Cos^3 2\beta = \dfrac{4Cos^3 2\beta}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + Cos3(2\beta)}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + Cos6\beta}{4}$
- $3Cos10º + Cos30º = 3Cos10º + Cos3(10º) = 4Cos^3 10º$

Tangente del arco triple

$$\boxed{Tan3x = \frac{3Tanx – Tan^3x}{1 – 3Tan^2x}}$$

Demostración

Notamos que:

$$\text{Tan}3x = \text{Tan}(x+2x) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}2x}{1-\text{Tan}x \bullet \text{Tan}2x} = \frac{\text{Tan}x + \left(\dfrac{2\text{Tan}x}{1-\text{Tan}^2x}\right)}{1-\text{Tan}x \bullet \left(\dfrac{2\text{Tan}x}{1-\text{Tan}^2x}\right)}$$

Efectuando tenemos:

$$\rightarrow \ \text{Tan}3x = \frac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1-3\text{Tan}^2x} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

- $\text{Tan}66^\circ = \text{Tan}3(22^\circ) = \dfrac{3\text{Tan}22^\circ - \text{Tan}^3 22^\circ}{1-3\text{Tan}^2 22^\circ}$
- $\text{Tan}9\alpha = \text{Tan}3(3\alpha) = \dfrac{3\text{Tan}3\alpha - \text{Tan}^3 3\alpha}{1-3\text{Tan}^2 3\alpha}$
- $\dfrac{3\text{Tan}10^\circ - \text{Tan}^3 10^\circ}{1-3\text{Tan}^2 10^\circ} = \text{Tan}3(10^\circ) = \text{Tan}30^\circ$

Cotangente, secante y cosecante del arco triple

Tomaremos las identidades recíprocas aplicadas el arco triple, es decir:

Como: $\text{Tan}3x \bullet \text{Cot}3x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Cot}3x = \dfrac{1}{\text{Tan}3x}$

Como: $\text{Cos}3x \bullet \text{Sec}3x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Sec}3x = \dfrac{1}{\text{Cos}3x}$

Como: $\text{Sen}3x \bullet \text{Csc}3x = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Csc}3x = \dfrac{1}{\text{Sen}3x}$

Problema aplicativo

Siendo: $\dfrac{\text{Sec}3x}{\text{Csc}3x} = \sqrt{0{,}444\ldots}$; calcular el valor de "Cot3x".

Resolución

Sabemos: $\dfrac{\text{Sec}3x}{\text{Csc}3x} = \sqrt{0{,}\widehat{4}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{1}{\text{Cos}3x}}{\dfrac{1}{\text{Sen}3x}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$

$\rightarrow \quad \dfrac{\text{Sen}3x}{\text{Cos}3x} = \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \text{Tan}3x = \dfrac{2}{3}$

Finalmente: $\text{Cot}3x = \dfrac{1}{\text{Tan}3x} \rightarrow \text{Cot}3x = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$

Resumen de fórmulas

Básicas:

Degradan "cubos":

* $\boxed{\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x}$ $\rightarrow$ $\boxed{4\text{Sen}^3x = 3\text{Sen}x - \text{Sen}3x}$

* $\boxed{\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x}$ $\rightarrow$ $\boxed{4\text{Cos}^3x = 3\text{Cos}x + \text{Cos}3x}$

* $\boxed{\text{Tan}3x = \dfrac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}}$

Observaciones:

* $\text{Cot}3x = \dfrac{1}{\text{Tan}3x}$

* $\text{Sec}3x = \dfrac{1}{\text{Cos}3x}$

* $\text{Csc}3x = \dfrac{1}{\text{Sen}3x}$

Especiales:

$\boxed{\text{Sen}3x = \text{Sen}x(2\text{Cos}2x + 1)}$

$\boxed{\text{Cos}3x = \text{Cos}x(2\text{Cos}2x - 1)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Tan}3x = \text{Tan}x\left(\dfrac{2\text{Cos}2x + 1}{2\text{Cos}2x - 1}\right)}$

$\boxed{4\text{Sen}x \bullet \text{Sen}(60^\circ - x) \bullet \text{Sen}(60^\circ + x) = \text{Sen}3x}$

$\boxed{4\text{Cos}x \bullet \text{Cos}(60^\circ - x) \bullet \text{Cos}(60^\circ + x) = \text{Cos}3x}$

$\boxed{\text{Tan}x \bullet \text{Tan}(60^\circ - x) \bullet \text{Tan}(60^\circ + x) = \text{Tan}3x}$

Notas

$\boxed{\text{Sen}18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}}$ $\boxed{\text{Cos}36^\circ = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{4}}$

$\boxed{\text{Csc}18^\circ = \sqrt{5} + 1}$ $\boxed{\text{Sec}36^\circ = \sqrt{5} - 1}$

Problemas I

1. Siendo:

$$\text{Cos } x = \frac{1}{4}$$

Calcular:

$$P = \text{Cos } 3x \cdot \text{Sec } x$$

a) $\frac{11}{4}$ b) $-\frac{11}{4}$ c) $\frac{7}{4}$
d) $-\frac{7}{4}$ e) $-\frac{5}{4}$

2. Siendo:

$\text{Cos } x = \sqrt{\frac{1}{3}}$; "x" es agudo;

Calcular: Tg 3x

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. Simplificar:

$$M = \frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} - 1$$

a) Cos x b) Cos 2x c) 2cos x
d) 2Cos 2x e) Cos^2x

4. Calcular:

$$J = \text{Sen } 10° \cdot \text{Sen } 50° \cdot \text{Sen } 70°$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$

5. Señale el valor de:

$$Y = \text{Sec } 20° \cdot \text{Sec } 40° \cdot \text{Sec } 80°$$

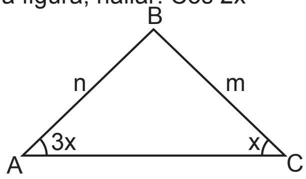
a) 8 b) 6 c) 16
d) 4 e) 32

6. Hallar "x", si:

$$\frac{\text{Tg}x}{\text{Tg}12°} = \frac{\text{Tg}72°}{\text{Tg}42°}$$

a) 36° b) 18° c) 24°
d) 54° e) 28°

7. De la figura, hallar: Cos 2x



a) $\frac{m-n}{2m}$ b) $\frac{m-n}{n}$ c) $\frac{m-n}{2n}$
d) $\frac{m-n}{m}$ e) $\frac{m+n}{2m}$

8. La siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\text{Sen}3\phi}{\text{Sen}\phi} + \frac{\text{Cos}3\phi}{\text{Cos}\phi} = 2k\text{Cos}\phi$$

Hallar: k

a) 0 b) 1 c) 2
d) 4 e) 3

9. Calcular:

$$\text{Cos } 85°(1+2\text{Sen } 80°)$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

10. Calcular:

$$\text{Sec}\frac{2\pi}{9} + 8\text{Cos}^2\frac{2\pi}{9}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 6

11. Simplificar:

$$W = \frac{\text{Sen}3x \cdot \text{Csc}x}{0{,}75 - \text{Sen}^2x} + \frac{3\text{Cos}x + \text{Cos}3x}{3\text{Sen}x - \text{Sen}3x}$$

a) $4+\text{Cot}^3x$ b) Cot^3x c) 2Cot^3x
d) 3Cot^3x e) 4Cot^3x

12. Si:

$$P = 4 - 8\text{Sen}^29° - 3\text{Sec } 18°$$

Entonces una expresión equivalente para P será:

a) Tg 9° b) Tg 18° c) 2Tg18°
d) 2Tg 9° e) Tg 36°

13. Si: $3Tg^2x + 6Tg\,x - 1 = 2Tg^3x$
Calcular: Tg 6x

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

14. En la siguiente igualdad se tiene una identidad trigonométrica:

$$\frac{ASen4x + BCos2x}{Senx + Cosx} = Sen3x \cdot Cotx + Cos\,3x \cdot Tg\,x$$

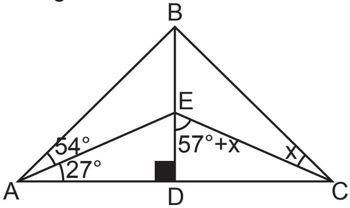
Calcular: A+B
a) 1 b) 2 c) 3
d) 6 e) 4

15. Si:
$aCsc\,x = 3 - 4Sen^2x$ ∧
$bSec\,x = 4Cos^2x - 3$
Calcular: a^2+b^2
a) –2 b) 0 c) 0,5
d) 1 e) 2

16. $Sen(60°-x) = \frac{1}{3}$
Calcular:
$$W = -Cos\,6x$$
a) $\frac{41}{47}$ b) $\frac{5}{67}$ c) $\frac{329}{729}$
d) $\frac{63}{65}$ e) $\frac{121}{130}$

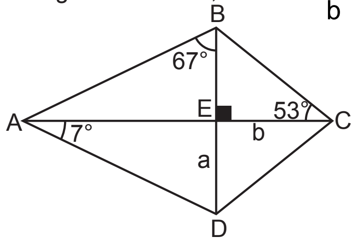
17. Calcular el valor de:
$$M = \frac{\sqrt[3]{1 + 6Cos20°}}{2Cos20°}$$
a) 1 b) 0 c) 0,5
d) 1,5 e) 3

18. En la figura mostrada, calcular “x”.



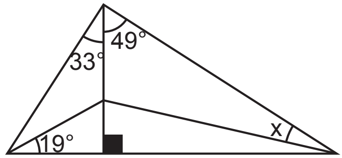
a) 10° b) 20° c) 15°
d) 25° c) 30°

19. En la figura mostrada, calcular: $\frac{a}{b}$



a) Tg 120° b) Tg 240° c) Tg 30°
d) Tg 54° e) Tg 21°

20. Calcular “x”.



a) 40° b) 50° c) 30°
d) 37° e) 53°

CLAVES I				
1. b	2. b	3. d	4. c	5. a
6. a	7. c	8. c	9. d	10. e
11. a	12. c	13. a	14. e	15. d
16. c	17. a	18. e	19. e	20. c

Problemas II

1. Reduzca:
$$P = \frac{Sen3x + Sen^3x}{Cos^3x - Cos3x}$$
a) Tan x b) Cot x c) Tan 3x
d) Cot 3x e) 1

2. Simplifique:
$$\frac{Cos^3x - Cos3x}{Cosx} + \frac{Sen^3x + Sen3x}{Senx}$$
a) –1 b) –2 c) 1
d) 2 e) 3

3. Calcule el valor de:
$$\frac{3Sen15° - 4Sen^3 15°}{4Cos^3 20° - 3Cos20°}$$
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$

4. Calcule el valor de: Sen 159°

a) $\frac{117}{225}$ b) $\frac{107}{225}$ c) $\frac{44}{225}$

d) $\frac{44}{125}$ e) $\frac{22}{225}$

5. Si: 2Sen 3x = 3Sen x; calcular: "Cos 2x"

a) 0,20 b) 0,25 c) 0,30
d) 0,40 e) 0,50

6. Calcular:

$$\frac{\text{Sen}10°\cdot\text{Sen}50°\cdot\text{Sen}70°}{\text{Tan}20°\cdot\text{Tan}40°\cdot\text{Tan}80°}$$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{16}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

7. Reduzca:

$3\text{Tan}^2\theta\cdot\cdot\text{Tan}\,3\theta+3\text{Tan}\,\theta-\text{Tan}^3\theta$

a) Tan θ b) Tan 3 θ c) Tan 6 θ
d) Cot θ e) Cot 3θ

8. Si: $\text{Tan}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$; calcular: "Tan 3x"

a) $-\frac{45\sqrt{3}}{28}$ b) $-\frac{15\sqrt{3}}{28}$ c) $-\frac{5\sqrt{3}}{28}$

d) $-\frac{5\sqrt{3}}{7}$ e) $-\frac{45\sqrt{3}}{14}$

9. Si: $4\text{Cos}^2\frac{x}{2}=3+4\text{Sen}^2\frac{x}{2}$;

Calcule: Cos 3x

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $-\frac{3}{16}$

d) $-\frac{9}{16}$ e) $-\frac{3}{8}$

10. Si: $0,\widehat{3}$ Csc α = Cos α; calcule: "Sen 6α"

a) $\frac{22}{27}$ b) $\frac{11}{27}$ c) $\frac{2}{27}$

d) $\frac{9}{11}$ e) $\frac{1}{27}$

11. Reduzca:

$16\text{Cos}^6x-24\text{Cos}^4x+9\text{Cos}^2x$

a) 3Sen x b) 3Cos x c) $\text{Cos}^2 3x$
d) $\text{Cos}^3 3x$ e) $\text{Cos}^4 3x$

12. Reducir:

$$E=\frac{\text{Sen}3x}{\text{Senx}}-3\text{Cos}^2x$$

a) $-\text{Sen}^2x$ b) -2Sen^2x c) $-\text{Cos}^2x$
d) Sen^2x e) Cos^2x

13. Reducir:

$$M=\frac{\text{Sen}3x+\text{Sen}^3x}{\text{Sen}2x}$$

a) $\frac{3}{2}$ Cos x b) $\frac{3}{2}$ Sen x c) $\frac{1}{2}$ Cos x

d) $\frac{1}{2}$ Sen x e) $\frac{3}{4}$ Cos x

14. Reduzca:

$$W=\frac{\text{Sen}2\beta}{2}\left(\frac{\text{Sen}3\beta}{\text{Sen}^3\beta}+\frac{\text{Cos}3\beta}{\text{Cos}^3\beta}\right)$$

a) 3Tan β b) 6Cot β
c) 3Tan 2β d) 6Tan 2β
e) 6Cot 2β

15. ¿A qué es equivalente:

$\sqrt{3}$ +6Cos 10°?

a) Sen 10° b) $\text{Sen}^3 10°$
c) $8\text{Sen}^2 10°$ d) $8\text{Cos}^3 10°$
e) $8\text{Sen}^3 10°$

16. Indique el equivalente de:

$\text{Tan}^2 20°\cdot\text{Tan}^2 40°+\text{Cot}^2 80°$

a) 2Tan 10° b) 4Tan 10°
c) $2\text{Tan}^2 10°$ d) $4\text{Tan}^2 10°$
e) 2Tan 20°

17. ¿Cuántos valores enteros puede tomar la expresión:

$$\frac{1-\text{Cos}6x}{1-\text{Cos}2x}$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 7 e) 9

18. Si: $\text{Sen}^2\dfrac{\pi}{3} - \text{Sen}^2 x = m\text{Sen } 3x$.
Halle: "m"

a) $\dfrac{1}{4}$ Sen x b) $\dfrac{1}{4}$ Csc x c) $\dfrac{1}{4}$ Cos x

d) $\dfrac{1}{2}$ Sen x e) $\dfrac{1}{2}$ Csc x

19. Reduzca:
Tan 10°+ Tan 60°+ Tan 40°
a) Tan 20° b) Tan 40° c) Tan 50°
d) Tan 70° e) Tan 80°

20. Si: $\text{Tan } 3x \cdot \text{Cot } x = n^3$
Calcule:

$$W = \frac{\text{Cos}x}{(n-1)\cdot \text{Cos}3x}$$

a) $\dfrac{n^2+n+1}{2}$ b) $\dfrac{n^2-n+1}{2}$

c) $\dfrac{n^3+n^2+1}{2}$ d) $\dfrac{n^2+n}{2}$

e) $\dfrac{n^2+n+1}{4}$

CLAVES II				
1. b	2. e	3. c	4. d	5. b
6. e	7. b	8. a	9. d	10. a
11. c	12. a	13. a	14. e	15. d
16. d	17. e	18. b	19. d	20. a

UNIDAD 13

Transformaciones trigonométricas

De suma o diferencia a producto

Recordar que:

$$\text{Sen}(x + y) = \text{Senx} \cdot \text{Cosy} + \text{Cosx} \cdot \text{Seny} \quad \text{.........................} \quad (1)$$

$$\text{Sen}(x - y) = \text{Senx} \cdot \text{Cosy} - \text{Cosx} \cdot \text{Seny} \quad \text{.........................} \quad (2)$$

(1) + (2):

$$\text{Sen}(x + y) + \text{Sen}(x - y) = 2\text{Senx} \cdot \text{Cosy} \quad \text{.........................} \quad (3)$$

Haciendo: $x + y = A \quad \rightarrow \; x - y = B \quad \rightarrow \quad x = \frac{A+B}{2} \quad \rightarrow \; y = \frac{A-B}{2}$

Reemplazando en (3):

$$\text{SenA} + \text{SenB} = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Análogamente y en resumen tendremos:

$\text{SenA} + \text{SenB} = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{SenA} - \text{SenB} = 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{CosA} + \text{CosB} = 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\text{CosB} - \text{CosA} = 2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Donde: $\boxed{A > B}$

Ojo:

$$\text{CosA} - \text{CosB} = -2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos

- $\text{Sen}6x + \text{Sen}2x = 2\text{Sen}\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \text{Cos}\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 2\text{Sen}4x \cdot \text{Cos}2x$

- $\text{Sen}80^\circ - \text{Sen}40^\circ = 2\text{Cos}\left(\dfrac{80^\circ+40^\circ}{2}\right)\bullet\text{Sen}\left(\dfrac{80^\circ-40^\circ}{2}\right) = 2\text{Cos}60^\circ\bullet\text{Sen}20^\circ$
- $\text{Cos}12\theta + \text{Cos}4\theta = 2\text{Cos}\left(\dfrac{12\theta+4\theta}{2}\right)\bullet\text{Cos}\left(\dfrac{12\theta-4\theta}{2}\right) = 2\text{Cos}8\theta\bullet\text{Cos}4\theta$
- $\text{Cos}5^\circ - \text{Cos}55^\circ = 2\text{Sen}\left(\dfrac{55^\circ+5^\circ}{2}\right)\bullet\text{Sen}\left(\dfrac{55^\circ-5^\circ}{2}\right) = 2\text{Sen}30^\circ\bullet\text{Sen}25^\circ$
- $\text{Cos}55^\circ - \text{Cos}5^\circ = -2\text{Sen}\left(\dfrac{55^\circ+5^\circ}{2}\right)\bullet\text{Sen}\left(\dfrac{55^\circ-5^\circ}{2}\right) = -2\text{Sen}30^\circ\bullet\text{Sen}25^\circ$

De producto a suma o diferencia

Recordar que:

Senx•Cosy + Cosx•Seny = Sen(x + y) ... (1)
Senx•Cosy – Cosx•Seny = Sen(x – y)... (2)

(1) + (2):

2Senx•Cosy = Sen(x + y) + Sen(x – y)

Análogamente y en resumen tendremos:

2Senx•Cosy	= Sen(x + y) + Sen(x – y)
2Cosx•Seny	= Sen(x + y) – Sen(x – y)
2Cosx•Cosy	= Cos(x + y) + Cos(x – y)

Donde: $\boxed{x > y}$

Ojo:

2Senx•Seny	= Cos(x – y) – Cos(x + y)

Ejemplos

- 2Sen5x•Cosx = Sen(5x + x) + Sen(5x – x) = Sen6x + Sen4x
- 2Cos30º•Sen15º = Sen(30º+15º) – Sen(30º–15º) = Sen45º – Sen15º
- 2Cos75º•Cos5º = Cos(75º+5º) + Cos(75º – 5º) = Cos80º + Cos70º
- 2Sen6θ•Sen4θ = Cos(6θ – 4θ) – Cos(6θ + 4θ) = Cos2θ – Cos10θ

Problema aplicativo

Factorizar:

E = Cos5x • Sen2x + Cos2x • Senx

Resolución

Multiplicamos por (2) a ambos miembros:

2E = 2Cos5x • Sen2x + 2Cos2x • Senx

Transformamos a diferencia de senos:

2E = Sen7x – Sen3x + Sen3x – Senx
2E = Sen7x – Senx

Transformamos a producto:

2E = 2Cos4x • Sen3x
E = Cos4x • Sen3x

Problemas I

1. Calcular:

$$K=\frac{\text{Sen}\frac{3\pi}{8}+\text{Sen}\frac{\pi}{8}}{\text{Sen}\frac{3\pi}{8}-\text{Sen}\frac{\pi}{8}}$$

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\sqrt{2}+1$ e) $\sqrt{2}-1$

2. Reducir:

$$P=\frac{\text{Sen}12x+\text{Sen}4x}{\text{Cos}12x+\text{Cos}4x}-\frac{\text{Cos}11x-\text{Cos}5x}{\text{Sen}11x-\text{Sen}5x}$$

a) 2Tan 8X b) 2 c) 1
d) 2Cot 8X e) 0

3. Siendo: $\phi=\frac{\pi}{19}$ rad
Hallar:

$$P=\frac{\text{Sen}3\phi-\text{Sen}23\phi}{\text{Sen}4\phi+\text{Sen}16\phi}$$

a) –1 b) 1 c) –2
d) 2 e) $\frac{1}{2}$

4. Simplificar:

$$Q=\frac{\text{Cos}(150°+x)+\text{Cos}(150°-x)}{\text{Cos}(120°-x)-\text{Cos}(120°+x)}$$

a) –Tan x b) Tan x c) –Cot x
d) Cot x e) 1

5. Hallar Cot 68°, si se cumple que:
Sen 12° + Sen 32° = m ;
Cos 12° + Cos 32° = n
a) m+n b) m–n c) mn
d) $\frac{m}{n}$ e) $\frac{n}{m}$

6. Calcular:

$$W=\frac{\text{Cos}10°+\text{Cos}15°+\text{Cos}20°}{\text{Sen}10°+\text{Sen}15°+\text{Sen}20°}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $2\sqrt{3}$
d) $2-\sqrt{3}$ e) $2+\sqrt{3}$

7. Hallar “n” en la siguiente Identidad:
1 + Cos 2x + Cos 6x + Cos 8x
= n · Cos x · Cos 3x · Cos 4x
a) 4 b) -4 c) 2
d) -2 e) 1

8. Calcular:

$$T=\frac{\text{Cos}10°}{\text{Cos}20°}+\frac{\text{Sen}40°}{\text{Sen}70°}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{3}$

9. Factorizar:
$Q = \text{Sen}^2 3x - \text{Sen}^2 2x$
a) Sen 5x · Cos x
b) Sen 5x · Sen x
c) Sen 3x · Sen 2x
d) Cos 5x · Sen x
e) Cos 5x · Cos x

10. Llevar a producto:
H = 1 + 2Sen 4y · Cos 4y
a) 2Sen(90°+8y)·Cos(90°–8y)
b) 2Sen(45°+4y)·Sen(45°–4y)
c) 2Cos(45°+4y)·Cos(45°–4y)
d) 2Cos(45°+4y)·Sen(45°–4y)
e) 2Sen(45°+4y)·Cos(45°–4y)

11. Factorizar:
M = 1 + 2Cos 5°
a) 4.Cos 65° · Cos 55°
b) 2Cos 32°30’ · Cos 27°30’
c) 4Cos 32°30’ · Cos 27°30’
d) 2Sen 32°30’ · Sen 27°30’
e) 4Sen 32°30’ · Sen 27°30’

12. Si:

Cos 36°= $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ y

Cos 72° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Hallar el valor de:
P = 2Cos 18° · Sen 36°
a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

13. Calcular:
Q = 6Cos 71°30’ · Sen 18°30’
a) 0,3 b) 0,4 c) 0,6
d) 0,8 e) 1,2

14. Reducir:
$T = Cos^2(A+B)+Cos^2(A-B)-Cos\ 2A \cdot Cos\ 2B$
a) Cos A b) Cos B c) 2
d) 1 e) 0

15. Factorizar:
$J = Cos\ 3x \cdot Cos\ 5x - Sen\ x \cdot Sen\ 3x$
a) Sen 6x · Cos 2x
b) Cos 6x · Sen 2x
c) Cos 12x · Sen 4x
d) Sen 6x · Sen 2x
e) Cos 6x · Cos 2x

16. Calcular:
$$P = \frac{Sen40° \cdot Cos10° - Cos20° \cdot Sen10°}{Cos20° \cdot Cos10° - Sen40° \cdot Sen10°}$$
a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Hallar el valor de:
U = Cot 33°30' – Tan 3°30'
a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{6}{13}$ c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{8}{11}$ e) $\frac{16}{11}$

18. En triángulo PQR se cumple que:
Sen P – Cos Q = Cos P – Sen Q
Luego su ángulo interno “R” mide:
a) 90° b) 45° c) 60°
d) 30° e) 15°

19. Siendo:
7Sen x · Cos x = 5Sen y · Cos y
Hallar:
Tan (x+y) · Cot (x–y)
a) 1 b) 6 c) –6
d) $\frac{1}{6}$ e) $-\frac{1}{6}$

20. Simplificar:
$$W = \frac{SenA + SenB + Sen(A+B)}{1 + Cos(A+B) + CosA + CosB}$$
a) $Cot\left[\frac{A+B}{2}\right]$ b) $Tan\left[\frac{A+B}{2}\right]$
c) $\frac{Tan[A+B]}{2}$ d) $Tan\left[\frac{A-B}{2}\right]$
e) $Cot\left[\frac{A-B}{2}\right]$

CLAVES I				
1. d	2. a	3. b	4. c	5. d
6. e	7. a	8. e	9. b	10. e
11. c	12. a	13. c	14. d	15. e
16. c	17. e	18. a	19. c	20. b

Problemas II

1. Halle el valor de “P”; si:
PCos 70° – Sen 65° + Sen 25° = 0
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\sqrt{3}$ e) 1

2. Simplifique:
$$\left(\frac{Cos3x + Cosx}{Cos3x - Cos5x}\right) Tan\ x$$
a) $\frac{1}{2}$ Sec x b) $\frac{1}{2}$ Csc x c) $\frac{1}{2}$ Sec 2x
d) $\frac{1}{2}$ Csc 2x e) Sec 2x

3. Reduzca:
$$\frac{Sen3x + Sen6x + Sen9x}{Cos3x + Cos6x + Cos9x}$$
a) Tan x b) Cot 3x c) Tan 6x
d) Cot 6x e) Tan 9x

4. Transforme a producto:
$M = Cos\ \alpha + Cos\ 5\alpha + Cos\ 9\alpha + Cos\ 15\alpha$
a) 4Cos α Cos 2α Cos 7α
b) 4Sen 2α Sen 5α Sen 7α
c) 4Cos 3α Cos 5α Cos 7α
d) 2Cos 3α Cos 7α Cos 9α
e) 2Cos α Cos 3α Sen 5α

5. Calcular:
$$\frac{(Cos40° + Sen24°)Csc77°}{(Cos20° - Sen10°)Sec40°}$$
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{8}{5}$

6. Reduzca:
2Sen 7x Cos 3x – Sen 4x
a) Sen 3x b) Sen 7x c) Sen 4x
d) Sen 10x e) Cos 10x

7. Transforme a producto:
$A = \text{Sen } 5x \text{ Sen } x + \text{Cos } 7x \text{ Cos } x$
a) $2\text{Cos } 6x \cdot \text{Cos } x$
b) $2\text{Sen } 6x \cdot \text{Sen } 2x$
c) $2\text{Sen } 2x \cdot \text{Cos } 6x$
d) $\text{Cos } 2x \cdot \text{Cos } 6x$
e) $\text{Sen } 2x \cdot \text{Sen } 6x$

8. Reduzca:
$N = 2\text{Cos } 4x \cdot \text{Csc } 6x - \text{Csc } 2x$
a) $-\text{Sec } 3x$ b) $-\text{Csc } 3x$ c) $-\text{Sec } 6x$
d) $-\text{Csc } 6x$ e) $\text{Tan } 6x$

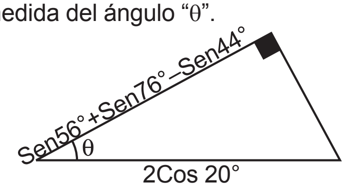
9. Simplificar:
$$A = \frac{\text{Sen}2x \cdot \text{Cos}3x - \text{Sen}x \cdot \text{Cos}4x}{\text{Cos}2x \cdot \text{Cos}5x - \text{Cos}4x \cdot \text{Cos}3x}$$
a) Cot x b) –Cot x c) Cot 5x
d) –Cot 2x e) Cot 2x

10. Simplifique:
$$\frac{\text{Sen}20^\circ}{\sqrt{3} - 2\text{Sen}20^\circ}$$
a) $\frac{1}{2}\text{Cos } 20^\circ$ b) $\frac{1}{2}\text{Sec } 20^\circ$
c) $\frac{1}{4}\text{Cos } 40^\circ$ d) $\frac{1}{4}\text{Sec } 40^\circ$
e) $\frac{1}{8}\text{Sec } 80^\circ$

11. Calcule el menor ángulo que cumple:
$$\text{Tan } x = \frac{2\text{Cos}20^\circ - \text{Sen}50^\circ}{\text{Sen}40^\circ}$$
a) 15° b) 20° c) 30°
d) 45° e) 60°

12. Reducir:
$$\frac{1 - 4\text{Sen}10^\circ \cdot \text{Sen}70^\circ}{\text{Sen}5^\circ \cdot \text{Cos}5^\circ}$$
a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{3}{2}$
d) 4 e) 5

13. En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo "θ".



a) 16° b) 32° c) 36°
d) 54° e) 72°

14. La expresión equivalente de:
$$\frac{\text{Sen}\theta + \text{Cos}(2x - \theta)}{\text{Cos}\theta - \text{Sen}(2x - \theta)}$$
es:
a) $\text{Cot}(\frac{\pi}{4} - x)$ b) $\text{Tan}(\frac{\pi}{4} - x)$
c) $\text{Tan}(\frac{\pi}{8} + x)$ d) $\text{Cot}(\frac{\pi}{4} + x)$
e) $\text{Tan}(\frac{\pi}{8} - x)$

15. Determine el valor de "k", si:
$k\text{Sen } 40^\circ = \text{Sec } 40^\circ + \text{Sec } 100^\circ$
a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$
d) $-2\sqrt{2}$ e) $-4\sqrt{3}$

16. Si: $2\text{Sen } 5\alpha = 3\text{Sen } 3\alpha$
Calcular:
$5\text{Cot } 4\alpha - \text{Cot } \alpha$
a) -2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

17. Transforme a producto:
$R = 3\text{Sen } 3x + 2\text{Sen } x + \text{Sen } 5x$
a) $8\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^3 x$
b) $16\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^4 x$
c) $12\text{Cos } x \cdot \text{Sen}^4 x$
d) $16\text{Cos } x \cdot \text{Sen}^3 x$
e) $32\text{Sen } x \cdot \text{Cos}^5 x$

18. Halle el valor de "K", para que la siguiente igualdad, sea una identidad:
$$\frac{\text{Sen}3x - \text{Sen}x}{\text{Cos}3x + \text{Cos}x} + \frac{\text{Sen}3x + \text{Sen}x}{\text{Cos}3x - \text{Cos}x} = k\left(\frac{\text{Sen}6x + \text{Sen}2x}{\text{Cos}6x - \text{Cos}2x}\right)$$
a) –2 b) 2 c) –1 d) 1 e) 4

19. Simplifique:
$$A = \frac{2(\text{Sen}2\alpha + \text{Sen}2\beta)}{1 + \text{Cos}2\alpha + \text{Cos}2\beta + \text{Cos}2(\alpha - \beta)}$$
a) $\text{Tan } \alpha + \text{Tan } \beta$ b) $\text{Tan } \alpha - \text{Tan } \beta$
c) $\text{Tan } \beta - \text{Tan } \alpha$ d) $\text{Tan } \alpha \cdot \text{Tan } \beta$
e) 1

20. Sabiendo que: $\text{Sen } \alpha + \text{Sen } \beta = a$
$\text{Cos } \alpha + \text{Cos } \beta = b$
Halle: $\text{Cos}(\alpha+\beta)\left[\frac{b^2 + a^2}{b + a}\right]$
a) b–a b) a–b c) a
d) b e) a+b

CLAVES II				
1. b	2. d	3. c	4. c	5. d
6. d	7. d	8. d	9. d	10. d
11. e	12. d	13. d	14. a	15. e
16. c	17. b	18. b	19. a	20. a

UNIDAD 14

Resolución de triángulos oblicuángulos

Triángulos oblicuángulos

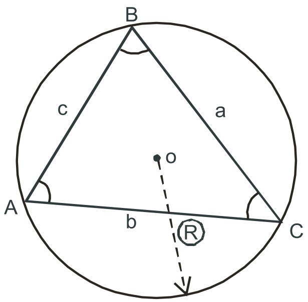
El triángulo que no contiene el ángulo recto se denomina OBLICUÁNGULO.

- Los elementos básicos de todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.
- Un triángulo está determinado si se conocen tres de sus elementos básicos (uno de ellos es nesariamente uno de los lados).
- Resolver un triángulo significa que dados tres elementos básicos, se puede calcular los otros tres elementos.

Leyes fundamentales

Ley de senos

"En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos".



En el ΔABC se cumple:

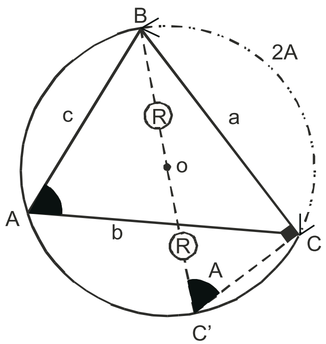
$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}}=\frac{b}{\text{SenB}}=\frac{c}{\text{SenC}}=2R}$$

"R" →Circunradio, "O" →circuncentro

Observaciones:

a = 2R•SenA
b = 2R•SenB
c = 2R•SenC

Demostración



* En el $\triangle$BCD:

$$\text{SenA}=\frac{a}{2R} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{\text{SenA}}=2R$$

* En forma análoga:

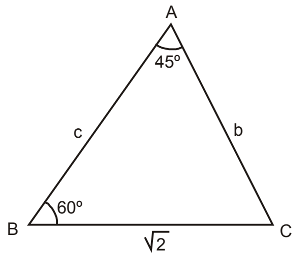
$$\frac{b}{\text{SenB}}=2R \quad \rightarrow \quad \frac{c}{\text{SenC}}=2R$$

Conclusiones

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{Senc} = 2R \qquad \text{L.q.q.d}$$

Ejemplos

1. En un triángulo ABC; si se cumple que $a = \sqrt{2}u$, B = 60º y A = 45º, calcular el lado AC.



Resolución

Datos: a = $\sqrt{2}$u

B = 60º

A = 45º

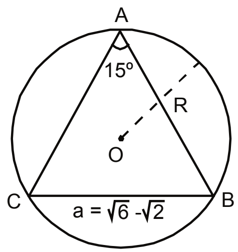
b = ??

Aplicando Ley de Senos

$$\frac{b}{Sen60º} = \frac{\sqrt{2}}{Sen45º} \quad \to \quad \frac{\sqrt{2}Sen60º}{Sen45º} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}/2}$$

$\to$ b = AC = $\sqrt{3}$ u

2. Hallar "R"



Resolución

Aplicamos: a = 2R•SenA

Según la figura:

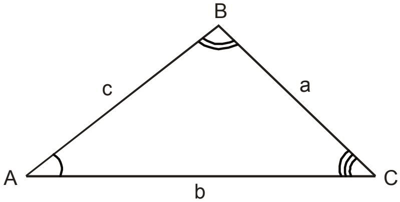
Reemplazando datos: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ = 2R•Sen15º

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2R\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

Luego: R = 2

Ley de cosenos

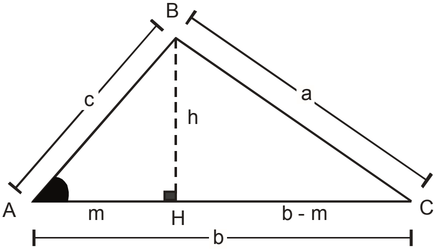
"En todo triángulo la medida de cualesquiera de sus lados al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que éstos forman".



En el ΔABC se cumple:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot CosA$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot CosB$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot CosC$

Demostración



Tenemos:

* En el ⊿AHB: $h^2 = c^2 - m^2$
* En el ⊿BHC: $h^2 = a^2 - (b - m)^2$ ... (2)

Igualando (1) y (2)

$$c^2 - m^2 = a^2 - b^2 + 2bm - m^2 \quad ... (3)$$

* En el ⊿AHB: $\frac{m}{c} = CosA$

$\rightarrow \quad m = cCosA$

Reemplazando en (3):

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b(cCosA)$$

En conclusión: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot CosA$ ...L.q.q.d

En forma análoga se demuestran las otras dos igualdades.

Observaciones:

De la ley de cosenos se deducen:

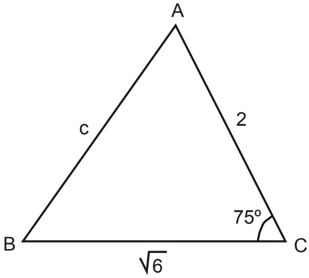
$$\boxed{CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}} \quad \boxed{CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} \quad \boxed{CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

Ejemplos

1. En un ΔABC; si se tiene que $a = \sqrt{6}u$, b = 2u y C = 75º

Resolución

Datos: $a = \sqrt{6}u$
$b = 2u$
$C = 75º$
$c = ??$



* Aplicando Ley de Cosenos:

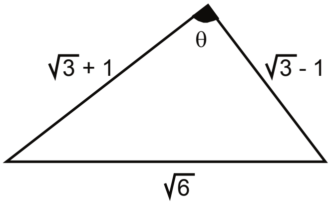
$$c^2 = (\sqrt{6})^2 + (2)^2 - 2(\sqrt{6})(2)\text{Cos}75º$$

$$c^2 = 6 + 4 - 4\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$\rightarrow$ $$c^2 = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$$

$\rightarrow$ $$c = (\sqrt{3}+1)u$$

2. En la figura, encontrar "Cosθ" y "θ"



Resolución

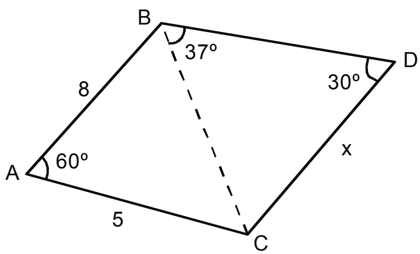
Aplicando la ley de Cosenos (Observaciones), tenemos del triángulo mostrado que:

$$\text{Cos}\theta = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$, efectuando tenemos:

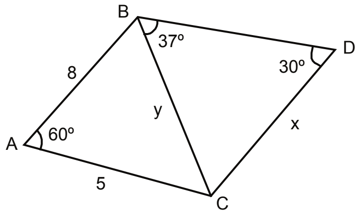
$\rightarrow$ $\text{Cos}\theta = \dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\theta = 60º$

Problema aplicativo

Hallar "x" en la figura:



Resolución



Hallamos "y" por ley de cosenos en el ΔABC

$$y^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \text{Cos}60º = 64 + 25 - 80º\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$y^2 = 49 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Hallamos "x" por ley de Senos en el ΔBOC

$$\frac{x}{\text{Sen}37º} = \frac{y}{\text{Sen}30º} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3/5} = \frac{7}{1/2}$$

$$\rightarrow \ x = \frac{42}{5} = 8{,}4$$

Problemas I

1. En un triángulo ABC: $a=\sqrt{2}$; $\hat{B}=60°$, $\hat{A}=45°$. Hallar el lado "b".
   a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{2}$ c) 1
   d) 2 e) $\sqrt{3}$

2. En un triángulo ABC, calcular "c", si: $a=8$; $b=5$ y $\hat{C}=60°$.
   a) 3 b) 4 c) 6
   d) 7 e) 9

3. En un triángulo ABC: $\hat{A}=37°$, $\hat{B}=30°$; $a=x+1$, $b=x-1$
   Calcular: x
   a) 10 b) 9 c) 11
   d) 13 e) 15

4. En un triángulo ABC: $a=5$, $b=3$, $c=7$; calcular: Cos A
   a) 1/14 b) 3/14 c) 5/14
   d) 9/14 e) 11/14

5. En un triángulo ABC, reducir:
   $$J=\frac{SenB}{b}-\frac{SenC}{c}$$
   a) 1 b) 2 c) ab
   d) 0 e) $\frac{2}{ab}$

6. En un triángulo ABC, reducir:
   $$E=\frac{a}{SenA}+\frac{2b}{SenB}-\frac{3c}{SenC}$$
   (R →Circunradio)
   a) 0 b) R c) 2R
   d) 3R e) 4R

7. En un triángulo ABC, los lados miden 5, 7 y 8. Calcular el Coseno del mayor de los ángulos interiores de dicho triángulo.
   a) 1/3 b) 1/4 c) 1/5
   d) 1/6 e) 1/7

8. En un triángulo ABC, se sabe que:
   $$\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$$
   Determinar el coseno del menor ángulo interno.
   a) 1/2 b) 2/3 c) 3/4
   d) 4/5 e) 1/3

9. En un triángulo ABC, si:
   $a^2+b^2+c^2=24$, calcular:
   $E = bcCos\,A + acCos\,B + abCos\,C$
   a) 6 b) 8 c) 10
   d) 12 e) 14

10. En un triángulo ABC, se cumple que:
   $a^2=b^2+c^2+bc$
   Calcular $\hat{A}$.
   a) 30° b) 60° c) 120°
   d) 150° e) 135°

11. En un triángulo ABC, reducir:
   $E = 2RSen(B+C) - a$
   (R →Circunradio)
   a) a b) b c) c
   d) 0 e) 1

12. En un triángulo ABC, reducir.
   $E = bcSen\,A(Ctg\,B + Ctg\,C)$
   a) a^2 b) b^2 c) c^2
   d) abc e) 3abc

13. En un triángulo ABC, reducir:
   $E = bCos\,C + cCos\,B + aCos\,B + bCos\,A - a$
   a) b b) a c) c
   d) a+c e) a+b

14. En que tipo de triángulo ABC, se cumple:
   $$\frac{a}{CosA}=\frac{b}{CosB}=\frac{c}{CosC}$$
   a) Isósceles b) Equilátero
   c) Rectángulo d) Escaleno
   e) →tal triángulo

15. Encontrar la superficie de un triángulo en el cual dos de sus lados miden 40 y 30 cm. y el logaritmo decimal del Seno del ángulo comprendido entre dichos lados es:
   -0,30103 (Log 2 = 0,30103)
   a) 200 cm² b) 250 cm² c) 280 cm²
   d) 300 cm² e) 600 cm²

16. En un triángulo ABC, los lados están representados por 3 números enteros consecutivos, si el ángulo mayor es el doble del menor. Hallar el perímetro.
   a) 12 b) 15 c) 18
   d) 21 e) 24

17. En un triángulo ABC, reducir:

$$E = (a+b)^2 \cdot Sen^2\left(\frac{C}{2}\right) + (a-b)^2 \cdot Cos^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

a) c b) 2c c) c²
d) 2c² e) $\left(\frac{1}{2}\right)$c²

18. En un triángulo ABC:

$$\frac{a}{CosA} + \frac{b}{CosB} + \frac{c}{CosC} = R$$

Calcular:

$$E = Tg\,A \cdot Tg\,B \cdot Tg\,C$$

a) 1 b) 2 c) 1/2 d) 4 e) 1/4

19. En un triángulo ABC, en un triángulo ABC se cumple:
$a Cos\,A + b Cos\,B + c Cos\,C = 2R Sen\,A \cdot Sen\,B$
Hallar: Tg 2C

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\pm\sqrt{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\pm\frac{1}{2}$

20. En un triángulo ABC:

$$\hat{C} = 2\hat{A} \quad y \quad 4c = 3a$$

entonces al calcular:

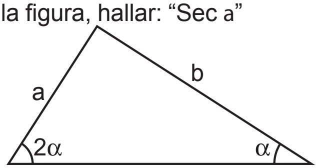
$$E = Cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) Sec\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

CLAVES I				
1. e	2. d	3. c	4. e	5. d
6. a	7. e	8. c	9. d	10. c
11. d	12. a	13. c	14. b	15. d
16. b	17. c	18. c	19. c	20. b

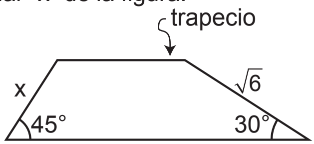
Problemas II

1. De la figura, hallar: "Sec a"



a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $\frac{b}{2a}$
d) $\frac{a}{2b}$ e) $\frac{2a}{b}$

2. Hallar "x" de la figura.



a) 2 b) 3 c) $\sqrt{2}$
d) 4 e) $\sqrt{3}$

3. En un triángulo ABC, se cumple que:
$b = \sqrt{2}\,\mu$, $c = \sqrt{3}\,\mu$; $m\angle C = 60°$.
Indicar la medida del ángulo A.
a) 30° b) 60° c) 15°
d) 75° e) 45°

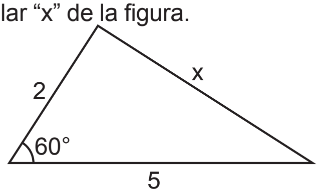
4. En un triángulo ABC, calcular el radio de la circunferencia circunscrita a partir de:

$$\frac{a+b}{SenA + SenB} + \frac{3c}{SenC} = 40$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

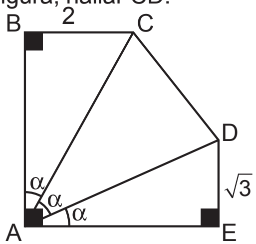
5. Dado un triángulo ABC simplificar:
2R[Sen(A+B)+Sen(A+C)+Sen(B+C)]
a) Área
b) Doble del área
c) Perímetro
d) Semiperímetro
e) Doble del perímetro

6. Hallar "x" de la figura.



a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{15}$
d) $\sqrt{17}$ e) $\sqrt{19}$

7. De la figura, hallar CD.



a) 5 b) 4 c) 2
d) 3 e) 1

8. En un triángulo ABC se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2}{3}bc$$

Hallar: Tg A

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. Se tiene un triángulo cuyos lados son proporcionales a 5; 6 y 7. Hallar el coseno del mayor ángulo de dicho triángulo.
a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4
d) 0,5 e) 0,6

10. En un ΔABC, hallar m $\angle$C.

Si: a = 1 u, b = 3 u y c = $\sqrt{7}$ u
a) 22°30' b) 45° c) 15°
d) 30° e) 60°

11. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 4m, si su mayor ángulo interno mide 120°, luego su perímetro es:
a) 30 m b) 60 m c) 15 m
d) 20 m e) 10 m

12. Dado un triángulo ABC donde se cumple:

$$\frac{a}{\text{CosA}} = \frac{b}{\text{CosB}} = \frac{c}{\text{SenC}}$$

Calcular: Sen $\frac{C}{3}$

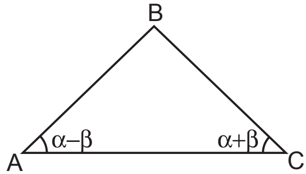
a) 0,4 b) 0,5 c) 0,7
d) 0,9 e) 0,3

13. En un triángulo ABC el perímetro es 24 m y el circunradio mide 5 m. Hallar:

$$N = \text{Sen A} + \text{Sen B} + \text{Sen C}$$

a) 1,2 b) 2,4 c) 2,8
d) 2,6 e) 1,8

14. De la figura adjunta:
Calcular: Tg α. Ctg β;
Si: $\overline{AB}$ = 17, $\overline{BC}$ = 15



a) 8 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17

15. En un triángulo ABC, reducir:

$$Q = 2\text{Sen}^2\frac{A}{2}(b+c)^2 + (b^2+c^2)\cdot\text{Cos A} - 2bc$$

a) a² b) b² c) c²
d) ab e) ac

16. Si los lados de un triángulo ABC están en progresión aritmética (a<b<c).
Calcular:

$$Q = \frac{\text{SenA} + \text{SenC}}{\text{SenB}}$$

a) 1 b) 2 c) 4

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

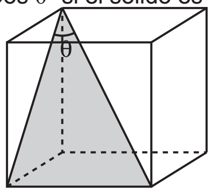
17. Dado un triángulo ABC, se cumple:

$$\frac{\text{Cos A}}{a} + \frac{\text{CosB}}{b} + \frac{\text{CosC}}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{kabc}$$

Luego el valor de "k" es:
a) 1 b) 2 c) 3

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

18. Hallar "Cos θ" si el sólido es un cubo.



a) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

19. Dado un triángulo ABC, reducir:

$$W = \frac{a-b}{a+b} + Ctg\left(\frac{B+A}{2}\right) \cdot Tg\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

a) 2 b) 1 c) 0

d) –1 e) –2

20. Dado un triángulo ABC, reducir:

$$N = (a+b)^2 \cdot Sen^2\frac{C}{2} + (a-b)^2 \cdot Cos^2\frac{C}{2}$$

a) 1 b) a^2 c) b^2

d) c^2 e) 2

CLAVES II				
1. e	2. e	3. d	4. e	5. c
6. e	7. c	8. c	9. a	10. e
11. a	12. b	13. b	14. d	15. a
16. b	17. b	18. c	19. c	20. d

UNIDAD 15

Funciones trigonométricas

Función trigonométrica

Se denomina FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA al conjunto de pares ordenados (x, y), tal que la primera componente “x” es la medida de un ángulo cualquiera en radianes y la segunda componente “y” es la razón trigonométrica de “x”.

Es decir:

$$\boxed{F.T. = \{ (x; y) \to y = R.T.(x) \}}$$

Dominio y rango de una función trigonométrica

Si tenemos una función trigonométrica cualquiera

$$y = R.T.(x)$$

- Se llama DOMINIO(DOM) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable “x”.

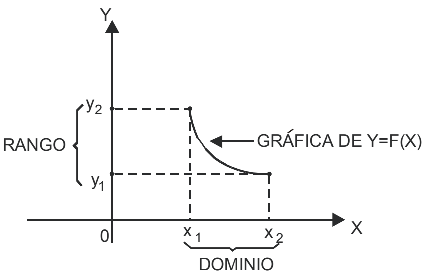
$$\boxed{DOM = \{x \to y = R.T.(x)\}}$$

- Se llama Rango(RAN) de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable “y”.

$$\boxed{RAN = \{y \to y = R.T.(x)\}}$$

Recordar álgebra

La gráfica corresponde a una función y = F(x) donde su DOMINIO es la proyección de la gráfica al eje X y el RANGO es la proyección de la gráfica al eje Y.



$DOM(F) = [x_1 ;\ x_2]$

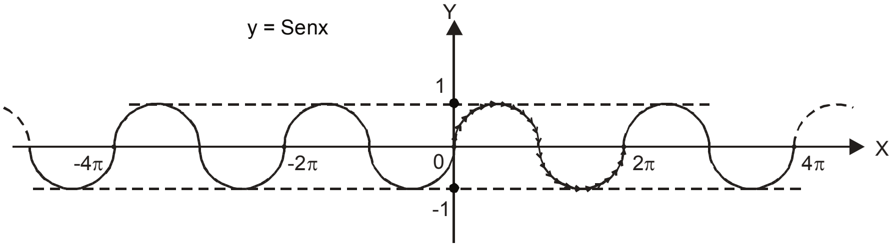
$RAN(F) = [y_1 ; y_2]$

Función Seno

Definición

$$\boxed{Sen = \{ (x; y) \rightarrow y = Senx \}}$$

Gráfico de la función seno



- El DOMINIO de la función seno es la proyección de su gráfica al eje x por lo tanto:

$$DOM(Sen) = \langle -\infty; +\infty \rangle \text{ o } \mathbb{R}$$

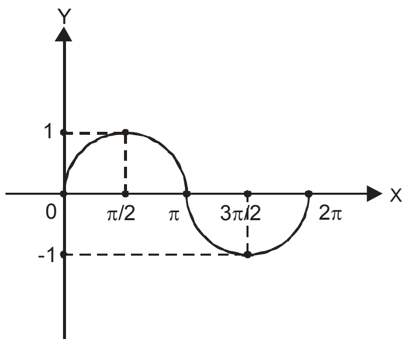
- El RANGO de la función seno es la proyección de su gráfica al eje y por lo tanto:

$$RAN(Sen) = [-1 ; 1]$$

Ojo al gráfico

Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función seno es PERIÓDICA de periodo 2π. Por lo tanto todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
y = Senx	0	1	0	-1	0



Nota:

El periodo de una función se representa por la letra "T" por lo tanto el periodo de la función seno se denota así:

$$T(Senx) = 2\pi$$

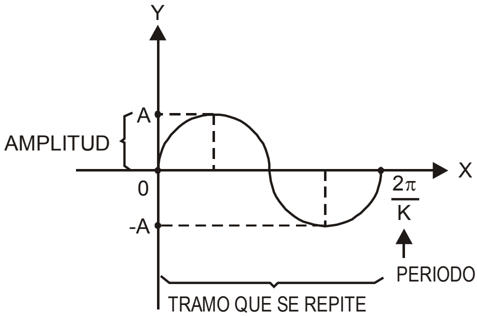
Propiedad

Si tenemos la función trigonométrica y = ±Asenkx entonces al número "A" se le va a llamar AMPLITUD y el periodo de esta función es 2π/k

Es decir:

$$y = \pm ASenkx \rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = A \\ T(Senkx) = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico



Ejemplos

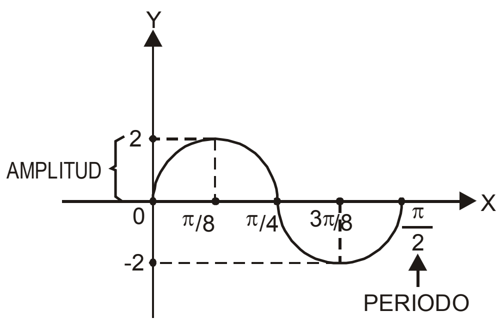
Graficar la función: y = 2Sen4x,

Indicar la amplitud y el periodo

Resolución

$$y = 2Sen4x \rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = 2 \\ T(Sen4x) = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Graficamos la función:

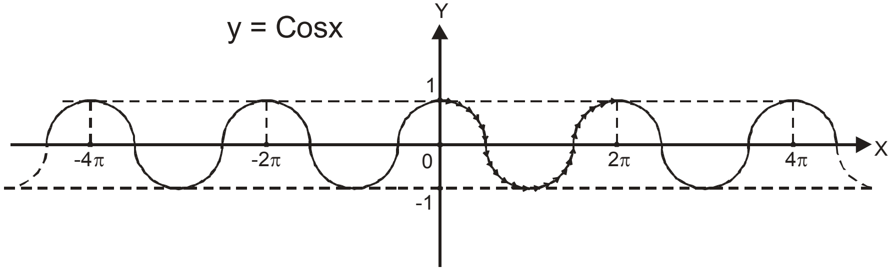


Función Coseno

Definición

$$\boxed{Cos = \{ (x ; y) \rightarrow y = Cosx \}}$$

Gráfico de la función coseno



- El DOMINIO de la función coseno es la proyección de su gráfica al eje X por lo tanto:

$$DOM(Cos) = \langle -\infty ; +\infty \rangle \text{ o } IR$$

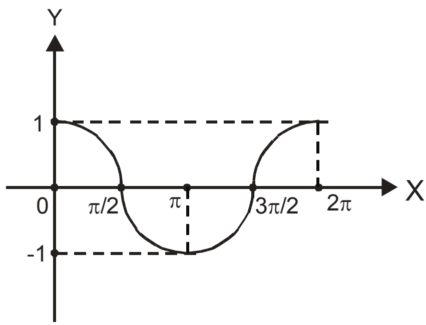
- El RANGO de la función coseno es la proyección de su gráfica al eje Y por lo tanto:

$$RAN(Cos) = [-1 ; 1]$$

Ojo al gráfico

Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es el periodo 2π; por lo tanto, todo análisis y cálculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
y = Cosx	1	0	-1	0	1



Nota:

El periodo de la función coseno se denota así:

$$T(Cosx) = 2\pi$$

Propiedad

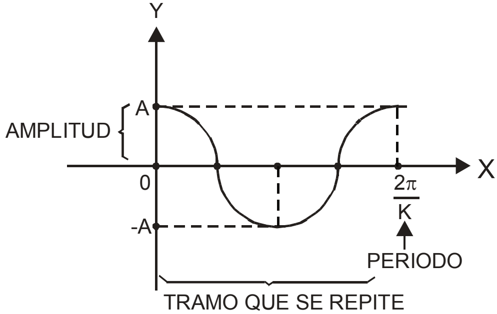
Si tenemos la función trigonométrica y = ±ACoskx, entonces al número "A" se le va a llamar AMPLITUD y el periodo de esta función es 2π/k.

Es decir:

$$y = \pm A\text{Cos}kx \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{AMPLITUD} = A \\ T(\text{Cos}kx) = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

Gráfico

y = ACoskx



Ejemplo

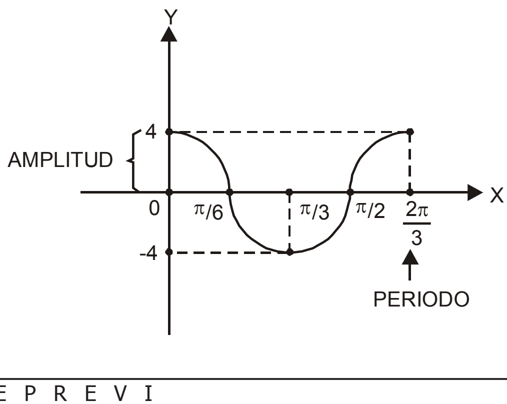
Graficar la función: y = 4Cos3x,

Indicar la amplitud y el periodo.

Resolución

$$y = 4\text{Cos}3x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{AMPLITUD} = 4 \\ T(\text{Cos}3x) = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

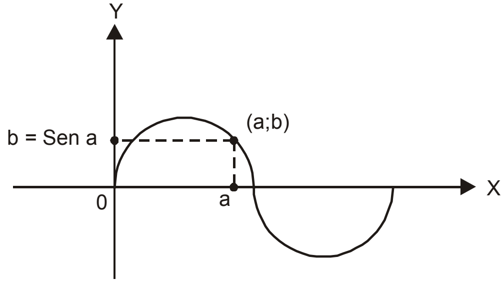
Graficamos la función



Propiedad fundamental para Seno y Coseno

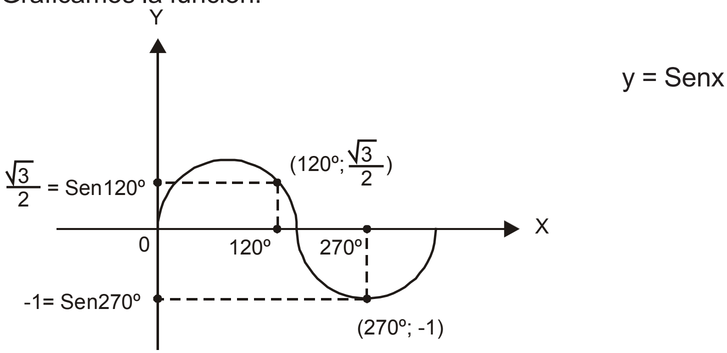
Para la función seno

Si (a; b) es un punto que pertenece a la gráfica de la función y = Senx, entonces se cumple que: b = Sena



Ejemplo

1. Graficamos la función:



2. Si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a la gráfica de la función y = Senx;

   Hallar: "n"

Resolución

Aplicamos la propiedad, si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a: y = Senx

$$\rightarrow \qquad 2n + 1 = \text{Sen}\frac{\pi}{6}$$

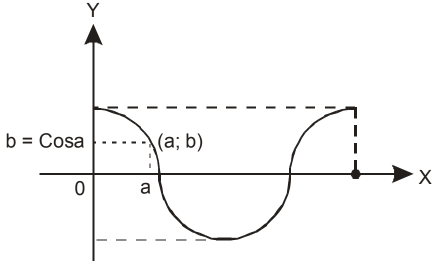
$$2n + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2n = -\frac{1}{2}$$

$$n = -\frac{1}{4}$$

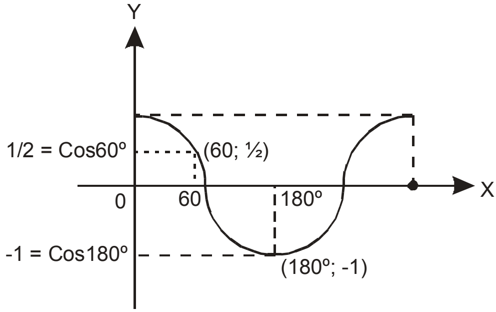
Para la función Coseno

Si (a; b) es un punto que pertenece a la gráfica de la función y = Cosx entonces se cumple que: b = Cosa



Ejemplo

1. Graficamos la función: y = Cosx



2. $\left(\dfrac{\pi}{4}; 2n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a la gráfica de la función y = Cosx

   Hallar "n"

Resolución

Aplicamos la propiedad. Si $\left(\dfrac{\pi}{4};2n+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a: y = Cosx

$$\rightarrow \qquad 2n+\frac{\sqrt{2}}{4}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}$$

$$2n+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2n=\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \rightarrow \qquad n=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Problemas I

1. Si el punto $P\left(\frac{2\pi}{3};5n\right)$ pertenece a la gráfica de la función: y = Cos x; halle "n".

   a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{1}{10}$

   d) $-\frac{5}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

2. Si el punto $Q\left(\frac{\pi}{4};\frac{a-b}{a+b}\right)$ pertenece a la gráfica de la función: y = Sen x; halle $\frac{a}{b}$.

   a) $3+2\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $3-2\sqrt{2}$

   d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$

3. Determinar la amplitud y periodo de c/u de las siguientes funciones:

   i. $y = 4\text{Sen}(\frac{x}{4})$
   ii. $y = \sqrt{18}\ \text{Sen}(\pi x)$
   iii. $y = 6 - 5\text{Sen}(3x)$
   iv. $y = 2\text{Sen}\ x \cdot \text{Cos}\ x \cdot \text{Cos}\ 2x$

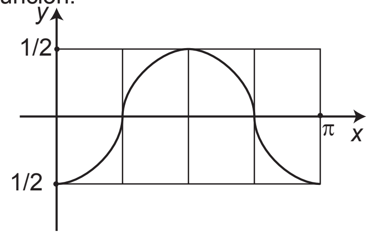
4. Determinar la amplitud y periodo de c/u de las siguientes funciones:

   i. $y = 0{,}5\text{Cos}(x\sqrt{2})$
   ii. $y = \pi\text{Cos}(\frac{x}{\pi})$
   iii. $y = 3+2\text{Cos}(x+60°)$
   iv. $y = (\text{Sen}\ x+\text{Cos}\ x)(\text{Sen}\ x-\text{Cos}\ x)$

5. Graficar las siguientes funciones:

   i. $y = 2\text{Sen}\frac{x}{2}$
   ii. $y = \sqrt{3}\ \text{Cos}\ 6x$
   iii. $y = -\text{Sen}\ 5x$
   iv. $y = -\frac{1}{3}\text{Cos}\frac{x}{4}$

6. El gráfico adjunto corresponde a la función:

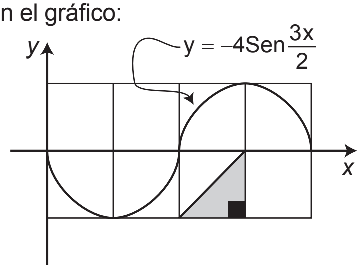


   a) –Cos x b) $-2\text{Cos}\frac{x}{2}$

   c) $2\text{Cos}\frac{x}{2}$ d) $-\frac{1}{2}\text{Cos}\ 2x$

   e) $\frac{1}{2}\text{Cos}\ 2x$

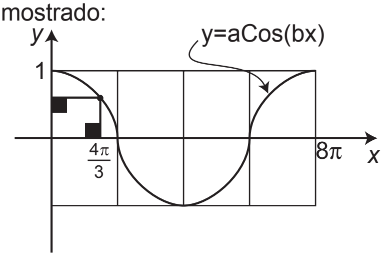
7. Halle el área de la región sombreada en el gráfico:



   a) $\frac{4\pi}{3}$ u² b) $\frac{2\pi}{3}$ u² c) $\frac{\pi}{3}$ u²

   d) $\frac{\pi}{6}$ u² e) $\frac{\pi}{12}$ u²

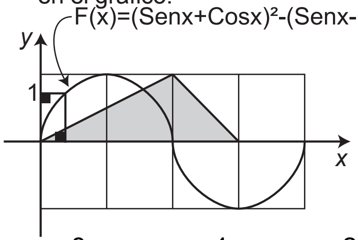
8. Halle "a/b" a partir del gráfico mostrado:



   a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

   d) 2 e) 8

9. Halle el área de la región sombreada en el gráfico:



a) $\frac{8\pi}{3}$ u² b) $\frac{4\pi}{3}$ u² c) $\frac{2\pi}{3}$ u²

d) $\frac{\pi}{3}$ u² e) $\frac{\pi}{6}$ u²

10. Hallar el rango, valores máximo y mínimo de la función:

$$Y = 5\text{Sen } x - 3$$

a) Ran.: $y \in [-8;2]$, Máx. = 2 , Mín.= –8
b) Ran.: $y \in [-2;8]$, Máx. = 8 , Mín.= –2
c) Ran.: $y \in [-8;-2]$, Máx. = –2 , Mín.= –8
d) Ran.: $y \in [2;8]$, Máx. = 8 , Mín.= 2
e) Ran.: $y \in [-1;1]$, Máx. = 1 , Mín.= –1

11. Halle el dominio de la función:

$$F(x) = \sqrt{\text{Cosx} - 1}$$

a) Dom.: $x = n\pi$; $n \in Z$
b) Dom.: $x = \frac{n\pi}{2}$; $n \in Z$
c) Dom.: $x = (2\pi+1)\pi$; $n \in Z$
d) Dom.: $x = 2\pi n$; $n \in Z$
e) Dom.: $x = \frac{n\pi}{4}$; $n \in Z$

12. Graficar las siguientes funciones:
i) $y = 4 + 3\text{Sen } 8x$
ii) $y = -2 - 4\text{Sen}(\frac{x}{5})$

13. Graficar las siguientes funciones:
i) $y = 2\text{Cos}(\frac{x}{4}) - 3$
ii) $y = -5\text{Cos } 6x + 1$

14. Halle la amplitud (A) y periodo (T) de la función:

$$y = 1 + 3\text{Cos}^2 2x$$

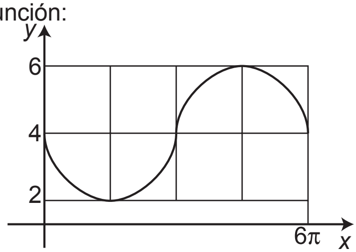
a) $A = 3$; $T = \pi$
b) $A = \frac{3}{2}$; $T = 2\pi$
c) $A = \frac{2}{3}$; $T = \frac{\pi}{2}$
d) $A = -\frac{3}{2}$; $T = \frac{\pi}{2}$
e) $A = \frac{3}{2}$; $T = \frac{\pi}{2}$

15. Halle la amplitud (A) y periodo (T) de la función:

$$y = 4\text{Sen}(\frac{x}{2}) - 3\text{Cos}(\frac{x}{2})$$

a) $A = 5$; $T = \frac{\pi}{2}$
b) $A = 5$; $T = 4\pi$
c) $A = 1$; $T = 4\pi$
d) $A = 1$; $T = \frac{\pi}{2}$
e) $A = 5$; $T = 2\pi$

16. El gráfico adjunto corresponde a la función:

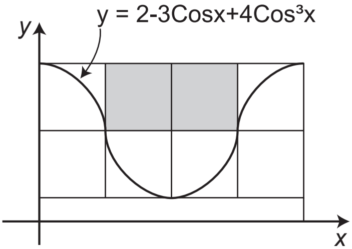


a) $2\text{Sen}\frac{x}{3}$ b) $2-4\text{Sen}\frac{x}{3}$

c) $4-2\text{Sen}\frac{x}{3}$ d) $2-4\text{Sen } 3x$

e) $4-2\text{Sen } 3x$

17. Halle el área de la región sombreada en el gráfico adjunto:



a) $\frac{8\pi}{3}$ u² b) $\frac{4\pi}{3}$ u² c) $\frac{2\pi}{3}$ u²

d) $\frac{\pi}{3}$ u² e) $\frac{\pi}{6}$ u²

18. Halle el rango de la siguiente función:

$F(x) = Sen^4x(1+Sen^2x) + Cos^4x(1+Cos^2x)$

a) [–1;1] b) $\left[\frac{3}{4};2\right]$ c) $\left[\frac{1}{4};1\right]$

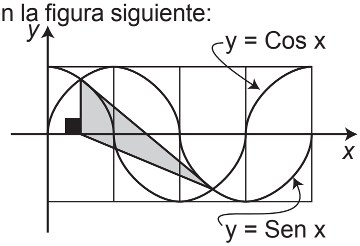
d) $\left[\frac{1}{2};1\right]$ e) $\left[\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]$

19. Indique el dominio y rango de la función:

$y = Sen\ 2x \cdot Sec\ x$

a) Dom.: $x \in R$; Ran.: $y \in [-2;2]$
b) Dom.: $x \in R-\{n\pi ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in \langle -2;2 \rangle$
c) Dom.: $x \in R-\{(2n+1)\pi/2 ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in [-2;2]$
d) Dom.: $x \in R-\{n\pi ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in [-2;2]$
e) Dom.: $x \in R-\{(2n+1)\pi/2 ; n \in Z\}$; Ran.: $y \in \langle -2;2 \rangle$

20. Halle el área de la región sombreada en la figura siguiente:



a) $\pi\sqrt{2}$ u² b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ u² c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ u²

d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ u² e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ u²

CLAVES I				
1. c	2. a	3.*	4.*	5.*
6. d	7. b	8. e	9. c	10. a
11. d	12.*	13.*	14. e	15. b
16. c	17. d	18. b	19. e	20. c

Problemas II

1. Si el punto $P\left(\frac{4\pi}{3};\frac{n}{2}\right)$, pertenece a la gráfica de la función: y=Sen x; halle “n”.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\sqrt{3}$ e) $-\frac{1}{2}$

2. Si el punto $M\left(\frac{\pi}{8};2n+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$; pertenece a la gráfica de la función: y = Cos 2x; halle: “n”

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{16}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Determine la amplitud y el periodo de las siguientes funciones:

a) $y = 7Sen\ 4x$

b) $y = \sqrt{23}\ Cos\frac{9x}{2}+40$

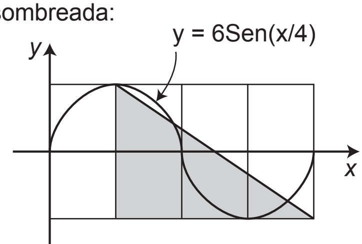
c) $y = 59-\sqrt{2}\,\pi \cdot Sen(\sqrt{2}\,x-12)$

d) $y = 4Sen\ x \cdot Cos\ x(Cos^2x-Sen^2x)$

4. Determine la amplitud y el periodo de las siguientes funciones:
   a) $y = \text{Cos } 8x$
   b) $y = \text{Log } 100 \cdot \text{Sen}\left(\frac{x}{4}+2\right)-5$
   c) $y = 3 - 4\text{Sen}^3x + 3\text{Sen } x$
   d) $y = \text{Sen } x + \sqrt{3}\ \text{Cos } x$

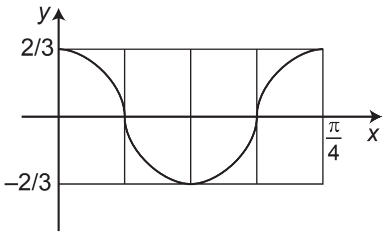
5. Grafique las siguientes funciones:
   i) $y = 6\text{Sen } 8x$
   ii) $y = -4\text{Sen}\left(\frac{x}{5}\right)$
   iii) $y = \sqrt{7}\ \text{Cos}\left(\frac{2x}{3}\right)$
   iv) $y = -\frac{5}{3}\text{Cos } 4x$

6. Calcule si área de la región sombreada:



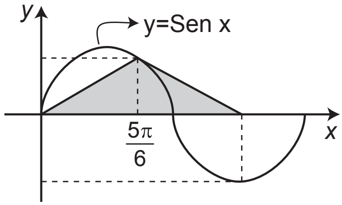
   a) 16π u² b) 24π u² c) 36π u²
   d) 48π u² e) 72π u²

7. La gráfica adjunta, corresponde a la función cuya regla de correspondencia es:



   a) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 2x$ b) $y = \frac{2}{3}\text{Cos } 2x$
   c) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 4x$ d) $y = \frac{3}{2}\text{Cos } 8x$
   e) $y = \frac{2}{3}\text{Cos } 8x$

8. Calcule el área de la región sombreada:



   a) $\frac{\pi}{8}$ u² b) $\frac{\pi}{4}$ u² c) $\frac{3\pi}{8}$ u²
   d) $\frac{\pi}{2}$ u² e) $\frac{\pi}{16}$ u²

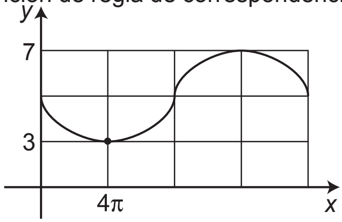
9. Grafique la función:
   $$y = \text{Sen } 2x \cdot \text{Csc } x$$
   e indique su dominio y rango.
   a) Dom = R ; Ran = [–2;2]
   b) Dom = R–$\frac{n\pi}{2}$; Ran = [–2;2]
   c) Dom = R–$n\pi$; Ran = [–2;2]
   d) Dom = R–$n\pi$; Ran =]–2;2[
   e) Dom = R–$\frac{n\pi}{2}$; Ran = [–1;1]

10. Grafique la función:
   $$y = \frac{\text{Sen}5x + \text{Sen}3x}{\text{Sen}4x}$$
   e indique su Dominio y Rango.

11. Si el punto $P\left(a;\frac{1}{2}\right)$ pertenece a la gráfica de la función: f(x)=3Sen x; halle el valor de la expresión:
   $$E = \text{Csc } a + \text{Cot}^2a$$
   a) 18 b) 24 c) 31
   d) 41 e) 45

12. Grafique las siguientes funciones:
   i) $y = 4 - 2\text{Sen } x$
   ii) $y = 3\text{Cos}\left(\frac{x}{4}\right) - 5$

13. La gráfica mostrada, corresponde a la función de regla de correspondencia:



a) $y = 3+\text{Sen}\,\frac{x}{2}$

b) $y = 3 - \text{Sen}\,\frac{x}{2}$

c) $y = 5 - 2\text{Sen}\,\frac{x}{8}$

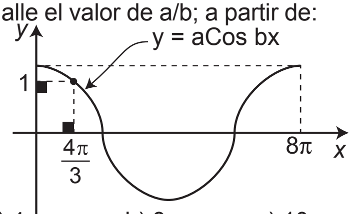
d) $y = 7 - 4\text{Sen}\,\frac{x}{4}$

e) $y = 4 - 2\text{Sen}\,\frac{x}{8}$

14. Determine el dominio y rango de la siguiente función:

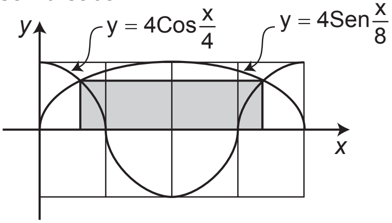
$$y = (\text{Csc}\, x - \text{Cot}\, x)\text{Cos}\,\frac{x}{2}$$

15. Halle el valor de a/b; a partir de:



a) 4 b) 8 c) 10
d) 12 e) 16

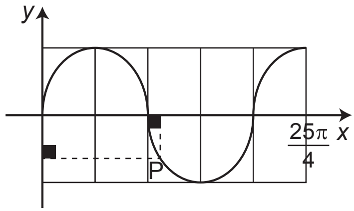
16. Calcule el área de la región sombreada:



a) $\frac{8\pi}{3}$ u² b) $\frac{4\pi}{3}$ u² c) $\frac{16\pi}{3}$ u²
d) $\frac{32\pi}{3}$ u² e) $\frac{48\pi}{3}$ u²

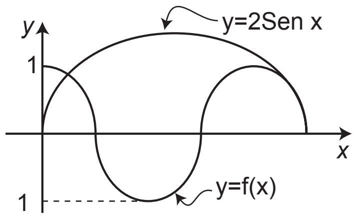
17. La ecuación de la gráfica adjunta es: y = Asen Bx ; además:

$P\left(\frac{10\pi}{3};-\sqrt{6}\right)$. Calcule: $\sqrt{2}\,A + 5B$



a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

18. Determine la regla de correspondencia de: y = f(x)



a) $y = \text{Cos}\,\frac{5x}{2}$

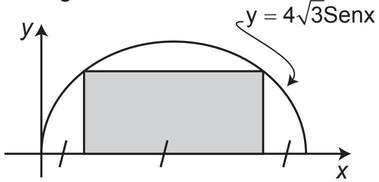
b) $y = 2\text{Cos}\,\frac{5x}{2}$

c) $y = \text{Cos}\,\frac{5x}{4}$

d) $y = \text{Sen}\,\frac{5x}{2}$

e) $y = \text{Cos}\, 5x$

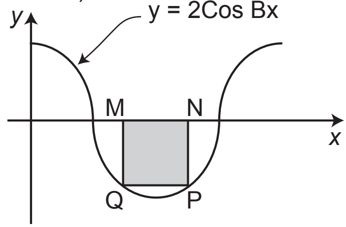
19. Del gráfico mostrado, determine la relación entre los lados de la región rectangular.



a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{8}$

d) $\frac{\pi}{9}$ e) $\frac{\pi}{18}$

20. Del gráfico mostrado, calcule el periodo de la función; cuyo gráfico se muestra, si el área de la región sombreada es de 3 u². (ABCD cuadrado)



a) $6\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$ e) $18\sqrt{3}$

CLAVES II				
1.d	2.c	3.*	4.*	5.*
6.c	7.e	8.c	9.d	10.*
11.d	12.*	13.c	14.*	15.b
16.d	17.c	18.a	19.e	20.a

UNIDAD 16

Ecuaciones trigonométricas

Ecuación trigonométrica

Una ecuación se llama TRIGONOMÉTRICA si ella contiene la incognita "x" sólo bajo los operadores trigonométricos.

Ejemplo

1. Senx = Cosx
2. Tanx – Cot2x = 0
3. $\text{Sen}\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$
4. Tan2x = 3x – 1

Ojo:

La ecuación del ejemplo Nº 4 no se llama trigonométricas, por que en esta la incognita "x" se encuentra no solo bajo el operador TAN, si no también sin otro operador trigonométrico.

Ecuación trigonométrica elemental

Una ecuación trigonométrica se llama ELEMENTAL o BÁSICA o SIMPLE si tiene la siguiente estructura:

$$\boxed{\text{F.T.(KX)} = a}$$

Ejemplo

1) $\text{Senx} = \frac{1}{2}$
2) $\text{Cos2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\text{Tan}\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$

Valor principal de una ecuación trigonométrica elemental

Se llama valor principal (VP) al menor ángulo positivo o mayor ángulo negativo que satisface una ecuación trigonométrica elemental, es decir:

Si: $\text{F.T.}\underbrace{(\text{KX})}_{\text{ángulo}} = a \rightarrow \quad \text{VP} = \text{ángulo}$

Valor principal para: SenKX = a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \le a \le 1$

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo.
- Si a es negativo entonces su VP es el negativo del ángulo agudo.
- Si a es 1 entonces su VP es 90º.
- Si a es -1 entonces su VP es -90º.
- Si a es 0 entonces su VP es 0º.

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones

1. $\text{Sen}x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{x}_{30^\circ} = \frac{1}{2} \rightarrow VP = 30^\circ$
2. $\text{Sen}x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{x}_{-30^\circ} = -\frac{1}{2} \rightarrow VP = -30^\circ$
3. $\text{Sen}4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{4x}_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow VP = 45^\circ$
4. $\text{Sen}4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{Sen}\underbrace{4x}_{-45^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow VP = -45^\circ$
5. $\text{Sen}2x = 1 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{2x}_{90^\circ} = 1 \rightarrow VP = 90^\circ$
6. $\text{Sen}2x = -1 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{2x}_{-90^\circ} = -1 \rightarrow VP = -90^\circ$
7. $\text{Sen}\frac{x}{3} = 0 \rightarrow \text{Sen}\underbrace{\frac{x}{3}}_{0^\circ} = 0 \rightarrow VP = 0^\circ$
8. Sen3x = 2 (La ecuación no tiene soluciones).

Ojo: El valor principal no es la incógnita “x” ($VP \neq x$).

Valor principal para CosKX = a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \le a \le 1$.

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo.
- Si a es negativo entonces su VP es el suplemento del ángulo agudo.
- Si a es 1 entonces su VP es 0º.
- Si a es -1 entonces su VP es 180º.
- Si a es 0 entonces su VP es 90º.

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones:

1. $\text{Cosx} = \frac{1}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{x}_{60º} = \frac{1}{2}$ → VP = 60º

2. $\text{Cosx} = -\frac{1}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{x}_{120º} = -\frac{1}{2}$ → VP = 120º

3. $\text{Cos4x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{4x}_{45º} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ → VP = 45º

4. $\text{Cos4x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\text{Cos}\underbrace{4x}_{135º} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → VP = 135º

5. $\text{Cos2x} = 1$ → $\text{Cos}\underbrace{2x}_{0º} = 1$ → VP = 0º

6. $\text{Sen}\frac{x}{3} = -1$ → $\text{Cos}\underbrace{2x}_{180º} = -1$ → VP = 180º

7. $\text{Cos}\frac{x}{3} = 0$ → $\text{Cos}\underbrace{\frac{x}{3}}_{90º} = 0$ → VP = 90º

8. Cos 3x = 3 (La ecuación no tiene solución)

Ojo: El valor principal no es la incógnita “x” (VP $\neq$ X)

Valor principal para TanKX = a

La ecuación tendrá soluciones para cualquier valor de “a”

- Si a es positivo entonces su VP es un ángulo agudo
- Si a es negativo entonces su VP es el negativo de ángulo agudo
- Si a es cero entonces su VP es 0º

Ejemplo

Calcular el VP de las siguientes ecuaciones:

1. $\text{Tanx} = \sqrt{3}$ → $\text{Tan}\underbrace{x}_{60º} = \sqrt{3}$ → VP = 60º

2 $\text{Tanx} = -\sqrt{3}$ → $\text{Tan}\underbrace{x}_{-60º} = -\sqrt{3}$ → VP = -60º

3. Tan3x = 1 → $\text{Tan}\underbrace{3x}_{45^\circ} = 1$ → VP = 45º

4. Tan3x = -1 → $\text{Tan}\underbrace{3x}_{-45^\circ} = -1$ → VP = -45º

5. Tanx = 0 → $\text{Tan}\underbrace{x}_{0^\circ} = 0$ → VP = 0º

6. $\text{Tan}\dfrac{x}{4} = 0$ → $\text{Tan}\underbrace{\dfrac{x}{4}}_{0^\circ} = 0$ → VP = 0º

Resolución de ecuaciones trigonométricas elementales

Resolver una ecuación trigonométrica elemental significa hallar todos los valores de la incógnita "x" que satisfacen dicha ecuación. Es decir, que reducen la ecuación a una igualdad después de la sustitución de la incógnita.

Así, por ejemplo la ecuación:

$$\text{Sen}\underbrace{2x}_{30^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$2x = 30^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Tiene por solución 15º, pero no es la única solución, porque también satisfacen los siguientes valores: 75º; 195º; 255º; 375º; 435º, ...

El motivo de estos resultados es que las funciones trigonométricas son PERIÓDICAS a continuación citaremos para las ecuaciones que involucran seno; coseno y tangente a fin de hallar todas sus infinitas soluciones.

Resolución de SenKX = a

Se aplica la siguiente fórmula:

$$\boxed{\text{SenKX} = a \rightarrow KX = n(180^\circ) + (-1)^n \cdot VP} \quad \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al resultado:

$$\boxed{x = \frac{n(180^\circ) + (-1)^n \cdot VP}{k}} \quad ; \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las cuatro primeras soluciones positivas:

$$\text{Sen}2x = \frac{1}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: VP = 30º

Aplicamos la fórmula: $2x = n(180º) + (-1)^n \bullet VP$

$2x = n(180º) + (-1)^n \bullet 30º$

Despejamos "x": $x = \dfrac{n(180º) + (-1)^n \bullet 30º}{2}$

Obteniendo así el conjunto solución:

$$\boxed{x = n(90º) + (-1)^n \bullet 15º}$$

Para calcuar las cuatro primeras soluciones positivas damos valores enteros positivos a "n". En el conjunto solución.

Para n = 0: $x = 0(90º) + (-1)^0 \bullet 15º \rightarrow x = 15º$

Para n = 1: $x = 1(90º) + (-1)^1 \bullet 15º \rightarrow x = 75º$

Para n = 2: $x = 2(90º) + (-1)^2 \bullet 15º \rightarrow x = 195º$

Para n = 3: $x = 3(90º) + (-1)^3 \bullet 15º \rightarrow x = 255º$

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes.

$$\text{Sen}3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = -45º = -\dfrac{\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(180º) + (-1)^n \bullet VP$

Pasamos a radianes: $3x = n(\pi) + (-1)^n \bullet \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Despejamos "x": $x = \dfrac{n\pi - (-1)^n \bullet \dfrac{\pi}{4}}{3}$

Obteniendo el conjunto solución:

$$\boxed{x = \frac{n\pi}{3} - (-1)^n \bullet \frac{\pi}{12}}$$

Para calcular las tres primera soluciones positivas, damos valores enteros positivo a "n" en el conjunto solución

Para n = 0 $\rightarrow x = 0 \bullet \dfrac{\pi}{3} - (-1)^0 \bullet \dfrac{\pi}{12} \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12}$ (no se toma)

Para n = 1 $\rightarrow x = 1 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^1 \bullet \frac{\pi}{12}$ $\rightarrow$ $x = \mathbf{\frac{5\pi}{12}}$

Para n = 2 $\rightarrow x = 2 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^2 \bullet \frac{\pi}{12}$ $\rightarrow$ $x = \mathbf{\frac{7\pi}{12}}$

Para n = 3 $\rightarrow x = 3 \bullet \frac{\pi}{3} - (-1)^3 \bullet \frac{\pi}{12}$ $\rightarrow$ $x = \mathbf{\frac{13\pi}{12}}$

Resolución de Cos KX = a
Se aplica la siguiente fórmula

$$\boxed{\text{CosKX} = a \rightarrow KX = n(360^o) \pm VP} \qquad \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al siguiente resultado:

$$\boxed{x = \frac{n(360^o) \pm VP}{k}} \qquad \text{"n"} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las cinco primeras soluciones positivas

$$\text{Cos}2x = \frac{1}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: VP = 60º

Aplicamos la fórmula : 2x = n(360º) ± VP

Despejamos "x": 2x = n(360º) ± 60º

Obtenemos el conjunto solución: x = n(180º) ± 30º

Para calcular las 5 primeras soluciones, damos valores enteros a "n" en el conjunto solución

Para n = 0 → x = 0.180º ± 30º → x = ±30º
→ x = 30º

Para n = 1 → x = 1(180º) ± 30º → x = 180º + 30º → x = 180º – 30º
→ x = 210º → x = 150º

Para n = 2 → x = 2(180º) ± 30º → x = 360º – 30º → x = 360º + 30º
→ x = 330º → x = 390º

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes

$$\text{Cos } 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = 135º = \frac{3\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(360º) \pm VP$

Despejamos "x": $3x = n(2\pi) \pm \frac{3\pi}{4}$

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}}$

Para calcular las tres primeras soluciones positivas, damos valores enteros a "n" en el conjunto solución.

Para n = 0 $\rightarrow$ $x = 0\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $x = \pm\frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

Para n = 1 $\rightarrow$ $x = 1\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{5\pi}{12}}$ $\rightarrow$ $x = \boldsymbol{\frac{11\pi}{12}}$

Resolución de TanKX = a

Se aplica la siguiente fórmula:

$\boxed{TanKX = a \rightarrow KX = n(180º) + VP}$ "n" $\rightarrow \mathbb{Z}$

Denominándose CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL al resultado.

$$\boxed{x = \frac{n(180º) + VP}{K}} \text{ ; "n" } \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación y hallar las TRES primeras soluciones positivas

$$Tan2x = \sqrt{3}$$

Resolución

Calculamos el valor principal: VP = 60º

Aplicamos la formula: 2x = n(180º) + VP

Despejamos "x": 2x = n(180º) + 60º

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n(90º) + 30º}$

Para calcular las 3 primeras soluciones positivas, damos valores enteros positivas a “n” en el conjunto solución

Para n = 0 → x = 0(90º) + 30º → x = 30º

Para n = 1 → x = 1(90º) + 30º → x = 120º

Para n = 2 → x = 2(90º) + 30º → x = 210º

2. Resolver la ecuación y hallar las tres primeras soluciones positivas en radianes.

$$\text{Tan } 3x = -1$$

Resolución

Calculamos el valor principal: $VP = -45º = -\frac{\pi}{4}$

Aplicamos la fórmula: $3x = n(180º) + VP$

Pasamos a radianes: $3x = n(\pi) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Despejamos “x”: $3x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

Obtenemos el conjunto solución: $\boxed{x = n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}}$

Para calcular las tres primeras soluciones positivas, damos valores enteros positivas a “n” en el conjunto solución.

Para n = 0 → $x = 0 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $x = -\frac{\pi}{12}$ (no se toma)

Para n = 1 → $x = 1 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $\mathbf{x = \frac{\pi}{4}}$

Para n = 2 → $x = 2 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $\mathbf{x = \frac{7\pi}{12}}$

Para n = 3 → $x = 3 \bullet \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ → $\mathbf{x = \frac{11\pi}{12}}$

Resolución de CotKX = a, SecKX = a, CscKX = a

Para resolver ecuaciones trignométricas elementales que involucran Cot, Sec y Csc se invierten y se obtienen Tan, Cos y Sen respectivamente.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación:

$$\text{Cot } 2x = \sqrt{3}$$

Resolución

Invertimos:

$$\text{Cot}2x = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\text{Cot}2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad VP = 30º$$

$$2x = n(180º) + VP$$

$$2x = n(180º) + 30º$$

$$x = \frac{n(180º) + 30º}{2}$$

$$\boxed{x = n(90º) + 15º}$$

2. Resolver la ecuación:

$$\text{Sec } 3x = 2$$

Resolución

Invertimos:

$$\text{Sec}3x = 2$$

$$\frac{1}{\text{Sec}3x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}3x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad VP = 60º$$

$$3x = n(360º) \pm VP$$

$$3x = n(360º) \pm 60º$$

$$x = \frac{n(360º) + 60º}{3}$$

$$\boxed{x = n(120º) \pm 20º}$$

3. Resolver la ecuación:

$$\text{Csc}\frac{x}{2} = \sqrt{2}$$

Resolución

Invertimos: $\text{Csc}\dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\text{Csc}\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{VP} = 45^\circ$$

$$\frac{x}{2} = n(180^\circ) + (-1)^n \bullet \text{VP}$$

$$\frac{x}{2} = n(180^\circ) + (-1)^n \bullet 45^\circ$$

$$x = 2[n(180^\circ) + (-1)^n \bullet 45^\circ]$$

$$\boxed{x = n(360^\circ) + (-1)^n \bullet 90^\circ}$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones trigonométricas, se reducen aplicando las identidades trigonométricas, identidades de transformación a ecuaciones elementales para luego seguir el procedimiento ya conocido.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación y hallar la segunda solución positiva:

$$\text{Sen } x = \text{Cos}x$$

Resolución

$$\text{Sen}x = \text{Cos}x$$

$$\frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x} = 1$$

Identidades: $\text{Tan}x = 1 \rightarrow \text{VP} = 45^\circ$

$$x = n(180^\circ) + \text{VP}$$

$$\boxed{x = n(180^\circ) + 45^\circ}$$

Para n = 0 → $x = 0(180^\circ) + 45^\circ$ → $x = 45^\circ$
Para n = 1 → $x = 1(180^\circ) + 45^\circ$ → $x = 225^\circ$

2. Resolver la ecuación y hallar la suma de las dos primeras soluciones positivas

$$\text{Sen } 2x = \text{Cos}x$$

Resolución

$$\text{Sen}2x = \text{Cos}x$$

$$\text{Sen}2x - \text{Cos}x = 0$$

Arco doble: $2\text{Sen}x\text{Cos}x - \text{Cos}x = 0$

$$\text{Cos}x(2\text{Sen}x - 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos dos ecuaciones elementales, por lo tanto dos conjuntos soluciones:

$\text{Cos } x = 0 \rightarrow VP = 90^\circ \qquad \rightarrow \qquad \text{Sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow VP = 30^\circ$

$x = n(360^\circ) \pm VP \qquad\qquad x = n(180^\circ) + (-1)^n \bullet VP$

$x = n(360^\circ) \pm 90^\circ \qquad\qquad x = n(180^\circ) + (-1)^n \bullet 30^\circ$

El conjunto solución de la ecuación será la unión:

$$\boxed{x = n(360^\circ) \pm 90^\circ} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{x = n(180^\circ) + (-1)^n \bullet 30^\circ}$$

Para n = 0 en el primer conjunto tenemos: $x = \pm 90^\circ$

$x = 90^\circ$

Para n = 0 en el segundo conjunto tenemos: $x = 30^\circ$

Luego la suma de las dos primeras soluciones positivas es:

$$30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

3. Resolver la ecuación y hallar la tercera solución positiva:

$$2\text{Sen}^2x = \text{Cos}2x$$

Resolución

$$2\text{Sen}^2x = \text{Cos}2x$$

Arco doble: $1 - \text{Cos } 2x = \text{Cos}2x$

$$\text{Cos } 2x = 1 - \text{Cos } 2x$$

$$\text{Cos } 2x + \text{Cos } 2x = 1$$

$$2\text{Cos } 2x = 1$$

$$\text{Cos}2x = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad VP = 60^\circ$$

$$2x = n(360º) \pm 60º$$

$$x = \frac{n(360º) \pm 60º}{2}$$

$$\boxed{x = n(180º) \pm 30º}$$

Para n = 0 → x = 0(180º) ± 30º → x = –30º v x = 30º

Para n = 1 → x = 1(180º) ± 30º → x = 180º–30º v x = 180º+30º

x = 150º v x = 210º

Luego la tercera solución positiva es 210º.

Problemas I

1. Resolver:

$$2\text{Cos } x - \sqrt{2} = 0 \ ; \ 0° < x < 360°$$

a) {45°;135°} b) {45°; 225°}
c) {45°; 315°} d) {135°; 225°}
e) {225°; 315°}

2. Resolver:
$4\text{Sen}^2x + 8\text{Sen } x + 3 = 0 \ ; \ x \in [0;2\pi]$

a) $\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{8}$ e) $\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$

3. Hallar "x" que satisface:

$$2\text{Cos}^2x + 3\text{Sen } x = 3$$

a) 30° y 90° b) 60° y 90°
c) 45° y 60° d) 75° y 150°
e) 30° y 180°

4. Hallar el menor valor positivo de "x" que resuelva la ecuación:

$$\text{Sen } x = 1 + \sqrt{3} \text{ Cos } x$$

a) 30° b) 45° c) 75°
d) 90° e) 60°

5. Hallar el menor valor positivo de "x" que resuelva la ecuación:

$$\frac{1}{1+\text{Senx}} + \frac{1}{1-\text{Senx}} = 8$$

a) 30° b) 45° c) 60°
d) 30° e) 36°

6. Hallar el menor valor positivo de "x" que satisface la ecuación:

$$2\text{Cos } x = 3\text{Tan } x$$

a) $\frac{\pi}{11}$ b) $\frac{5\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{6}$

7. Hallar "x" en la ecuación:
$\text{Tan}(45°+x)=3 \text{ Tan } x + 2 \ ; \ 0°<x<90°$

a) 15° b) 30° c) 45°
d) 60° e) 75°

8. Resolver "x" que satisface:
$2\text{Cos } x + \text{Cos } 2x = -1{,}5 \ ; \ 90°<x<180°$

a) 120° b) 135° c) 127°
d) 143° e) 150°

9. Hallar la suma de valores de los ángulos "θ" comprendidos entre 0° y 360° que cumpla:

$$2\sqrt{3} \text{ Cos}^2\theta = \text{Sen } \theta$$

a) 60° b) 120° c) 180°
d) 270° e) 360°

10. Hallar la suma de soluciones comprendidas entre 0° y 360° que cumpla:

$$2\text{Tan}^2x + 3\text{Sec } x = 0$$

a) 180° b) 270° c) 120°
d) 540° e) 360°

11. Hallar el número de soluciones para: $x \in \langle 0°; 180° \rangle$ que cumpla:

$$\text{Tan}^2x - 3 = 0$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 0 e) 4

12. Hallar "x" que satisfaga:

$$\sqrt[8]{\text{Tanx}} + \sqrt[8]{\text{Cotx}} = 2$$

a) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{8}$

13. Hallar el número de soluciones de "θ" en el recorrido de 0 a 2π que cumpla:

$$(4\text{Cos}^2\theta-3)(\text{Csc } \theta + 2) = 0$$

a) 3 b) 2 c) 1
d) 4 e) 5

14. Resolver "x" que satisface:

$$\text{Tan}^2x - (1+\sqrt{3})\text{Tan } x + \sqrt{3} = 0$$

a) $\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{4};\frac{4\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$

15. Hallar el menor ángulo positivo que cumpla:

$$\text{Sen}^2x - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\text{Sen } x + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{12}$ e) $\frac{5\pi}{4}$

16. Resolver:

Cos x = $\sqrt{3}$ Sen x + $\sqrt{2}$; una solución es:

a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{17\pi}{12}$
d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{12}$

17. Hallar "α" que cumpla:

$$\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \alpha + \sqrt{2} \cdot \text{Cos } 2\alpha = 0$$

a) $\frac{\pi}{16}$ b) $\frac{\pi}{18}$ c) $\frac{\pi}{10}$
d) $\frac{5\pi}{12}$ e) $\frac{\pi}{12}$

18. Hallar "x":

$$\sqrt{2+\text{Tanx}} + \sqrt{2-\text{Tanx}} = \sqrt{2}\text{Tanx}$$

a) 30° b) 60° c) 90°
d) 45° e) 53°

19. Siendo "x_1" una raíz de la ecuación:

3Sen x + 4Cos x = 5

en el intervalo: 0°<x<90
Hallar: x_1

a) 30° b) 37° c) 45°
d) 60° e) 53°

20. Hallar los valores de x en el recorrido dé $\langle 0;\pi \rangle$ que satisface:

$$\text{Sen } 4x \cdot \text{Cos } x = \frac{1}{4} + \text{Sen}\frac{5x}{2} \cdot \text{Cos}\frac{5x}{2}$$

Indicar el cociente entre la mayor y la menor raíz.

a) 11 b) 13 c) 17
d) 5 e) $\frac{17}{18}$

CLAVES I				
1.c	2.e	3.a	4.d	5.c
6.e	7.b	8.a	9.c	10.e
11.b	12.d	13.d	14.b	15.b
16.c	17.d	18.b	19.b	20.c

Problemas II

1. Resolver la ecuación:

$$2\text{Sen } 12x - \sqrt{3} = 0$$

a) 5° b) 8° c) 10°
d) 14° e) 15°

2. Resolver:

$$\sqrt{2}\ \text{Csc}(x-8°) - 1 = 0$$

a) 15° b) 30° c) 37°
d) 45° e) 53°

3. Resolver la siguiente ecuación:

5Sen(2x+87°) + 3 = 0

a) 25° b) 39° c) 50°
d) 65° e) 70°

4. Resolver:

25Cos(3x+29°) + 24 = 0

a) 18° b) 25° c) 36°
d) 45° e) 53°

5. Indicar una solución de la siguiente ecuación ecuación:

Tan(5x+10°) + 1 = 0

a) 10° b) 25° c) 28°
d) 30° e) 45°

6. Hallar las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$$\text{Sen } x - \sqrt{3}\ \text{Cos } x = 0$$

a) {15°; 195°} b) {30°; 210°}
c) {30°; 150°} d) {30°; 60°}
e) {60°; 240°}

7. Hallar la segunda solución positiva de la ecuación:

$$\text{Cos}^2x = \frac{1}{2}$$

a) 45° b) 90° c) 135°
d) 150° e) 315°

8. Calcular la segunda solución positiva de la ecuación:

Sen x – Cos x = 1

a) 75° b) 45° c) 90°
d) 150° e) 180°

9. Resolver:

$$\frac{Sen4x+Sen2x}{2Cos2x+1}=\frac{1}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{3}$

10. Resolver la ecuación y dar como respuesta la suma de las soluciones comprendidas en $[0;2\pi]$:

$$(1+Tan\ x)(1-Tan\ x) = 1$$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{5\pi}{3}$
d) 3π e) 4π

11. Calcular la tercera solución positiva de la ecuación:

$$2Cos^2x - 7Cos\ x + 3 = 0$$

a) 60° b) 120° c) 240°
d) 300° e) 420°

12. Hallar el número de soluciones de la siguiente ecuación, para $x \in [0°; 180°]$:

$$Sen\ 3x+\ Sen\ x = 0$$

a) 1 b)2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Calcular la suma de soluciones de la siguiente ecuación, para $x \in [0;2\pi]$.

$$Sen\ x - Cos\ 2x = 0$$

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{2}$ c) $\frac{7\pi}{2}$
d) π e) 2π

14. Resolver e indicar el número de soluciones para $x \in [0;2\pi]$ de:

$$Sen^2x + Sen\ x = Cos^2x$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Hallar la menor solución positiva de la siguiente ecuación:

$$Sen18x+Sen10x+2\sqrt{3}\ Sen^2 2x=\sqrt{3}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{22}$
d) $\frac{\pi}{42}$ e) $\frac{\pi}{52}$

16. Resolver la siguiente ecuación, para $x \in [0;2\pi]$.

$$Sen\ x + Cos\ x = 1 + Sen\ 2x$$

dar como respuesta la suma de soluciones.

a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π

17. Si: $x \in]90°;180°[$, esolver:

$$Tg(x+45°) + Tg(x-45°) - 2Ctg\ x = 0$$

a) 105° b) 120° c) 135°
d) 150° e) 165°

18. Calcular la mayor solución positiva y menor a una vuelta de la ecuación:

$$Tan\ x + Sen\ x = 2Cos^2\frac{x}{2}$$

a) 150° b) 180° c) 45°
d) 225° e) 315°

19. Hallar el número de soluciones positivas y menores a una vuelta.

$$2Sen\ x + Cot\ x = Csc\ x$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

20. Si $x \in [0;2\pi]$; sumar las soluciones de la ecuación:

$$Tg^2x=\frac{1-Cosx}{1-Senx}$$

a) $\frac{9\pi}{2}$ b) 3π c) $\frac{7\pi}{2}$
d) π^2 e) 2π

CLAVES II				
1. a	2. e	3. d	4. d	5. b
6. e	7. c	8. e	9. a	10.d
11.e	12.c	13.b	14.c	15.d
16.e	17.d	18.d	19.b	20.c